Kwaterniony i ich wykorzystanie w wizualizacji komputerowej

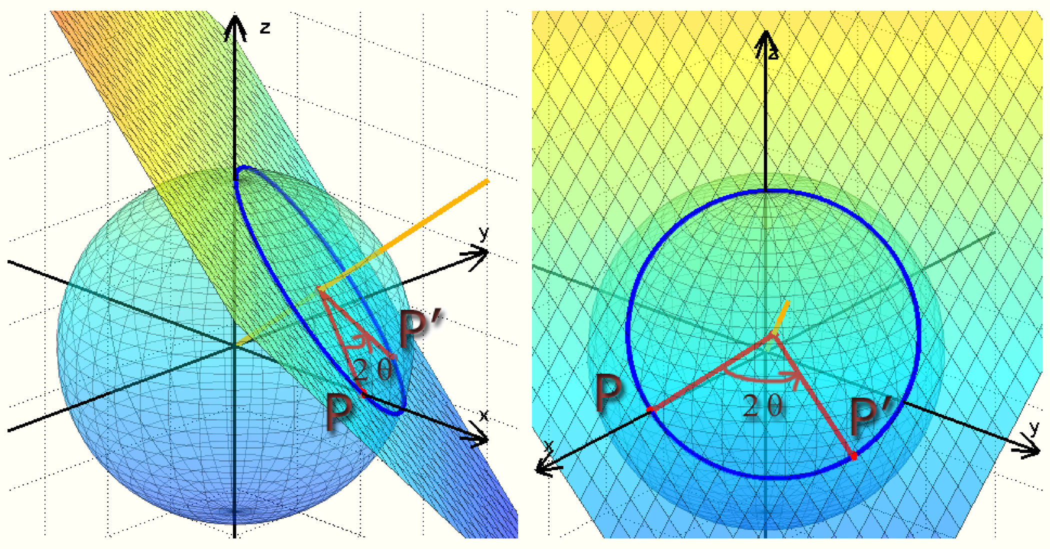
Mgr inż. Mateusz Kowalski

Związek z przestrzenią $\mathbb{R}^3$

Część wektorową $V(q) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ kwaternionu możemy uważać za wektor $\vec{v} = [x, y, z]$ kartezjańskiego, trójwymiarowego układu współrzędnych, w którym $\vec{\mathbf{i}} = [1, 0, 0]$, $\vec{\mathbf{j}} = [0, 1, 0]$, $\vec{\mathbf{k}} = [0, 0, 1]$ stanowią bazę.

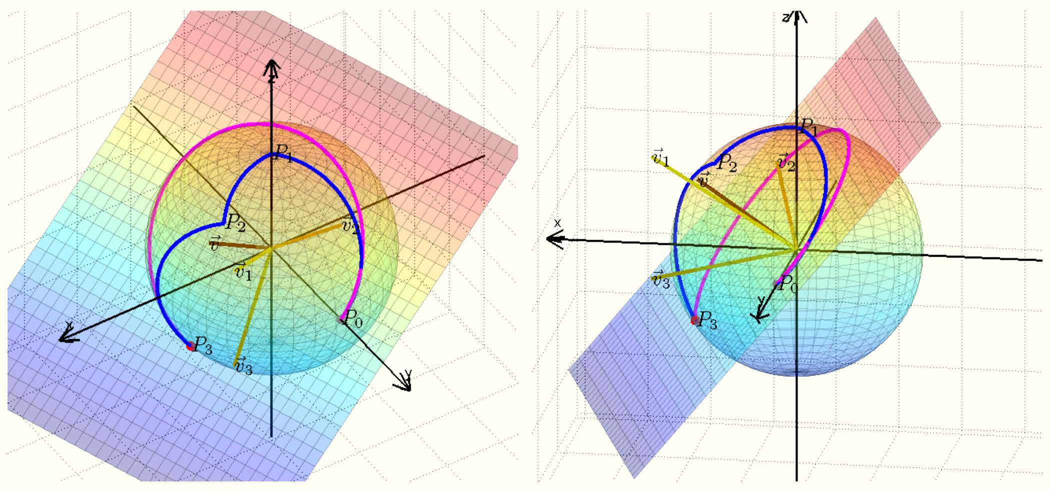
Rotacja w przestrzeni $\mathbb{R}^3$

Obrócić punkt $P = (1, 0, 0)$ wokół osi utworzonej przez wektor $\vec{v} = [1, 1, 1]$ zaczepiony w punkcie (0,0,0) o kąt $2\theta = 90°$



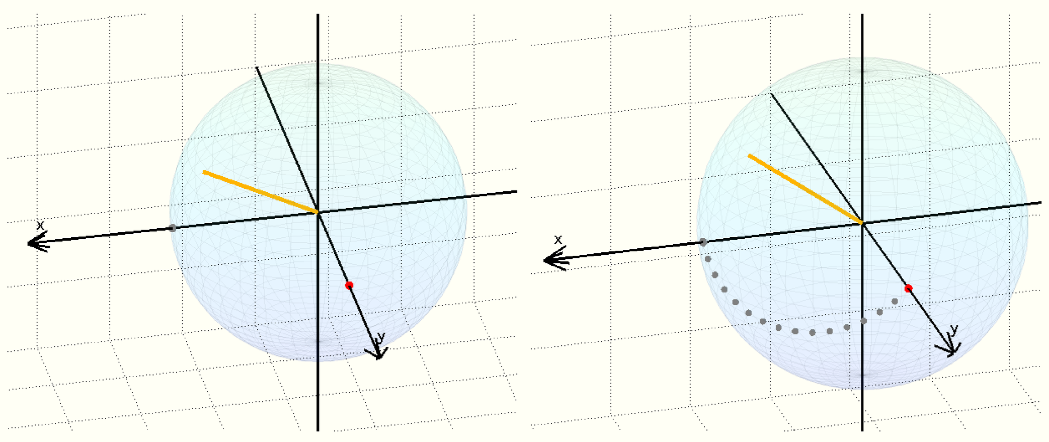
Składanie obrotów w $\mathbb{R}^3$

Obrót punktu $P = (0, 1, 0)$ wokół osi $\vec{v}_1 = [1, 1, 1]$ o kąt $120°$, następnie wokół osi $\vec{v}_2 = [0, 1, 1]$ o kąt $60°$ i w końcu wokół osi $\vec{v}_3 = [1, 1, 0]$ o kąt $120°$. W efekcie uzyskano punkt $P' \approx (0,8; 0,06; -0,6)$



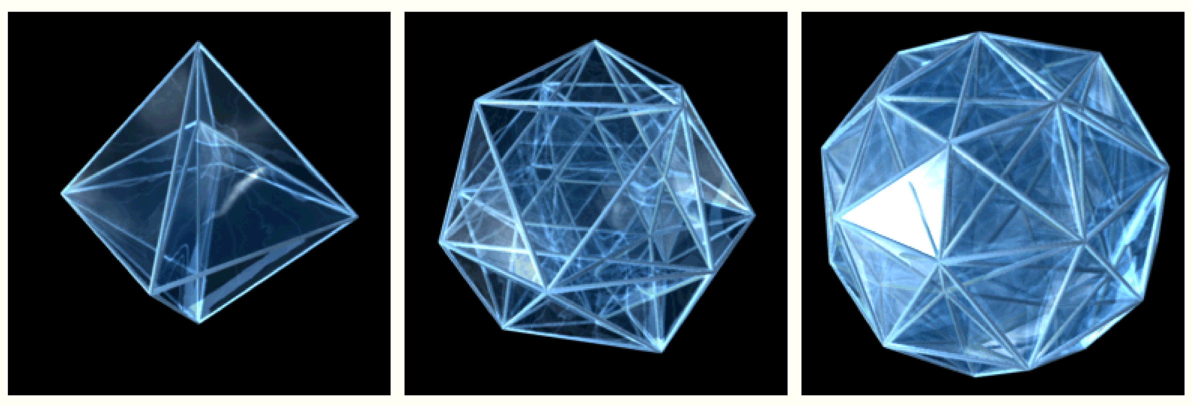
Interpolacja obrotu w $\mathbb{R}^3$

Cenną cechą kwaternionów jest łatwość dokonania interpolacji obrotu. Co więcej wyznaczone punkty są równomiernie rozmieszczone. Taka własność pozwala na wykonanie płynnej animacji obrotu.



Kwaterniony Hurwitz'a

Jeśli kwaternion umieścimy w przestrzeni $\mathbb{R}^4$ wówczas stanowić one będą wierzchołki komórek foremnych.



Ujęcie definicyjne

Kwaternion to **uporządkowana** czwórka czterech liczb rzeczywistych (s, x, y, z), albo ekwiwalentnie **uporządkowana** para dwóch liczby zespolonych (w, t), dla których równość, dodawanie i mnożenie definiujemy następująco:

- $(w_1, t_1) = (w_2, t_2) \iff w_1 = w_2$ i $t_1 = t_2$,
- $(w_1, t_1) + (w_2, t_2) = (w_1 + w_2, t_1 + t_2)$,
- $(w_1, t_1) \cdot (w_2, t_2) = (w_1 w_2 - t_1 \bar{t}_2, w_1 t_2 + t_1 \bar{w}_2)$,

Postać algebraiczna

Kwaternion można przedstawić w postaci algebraicznej:

$$q = s + x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

Przy czym $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ są jednostkami urojonymi, takimi, że

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = \mathbf{ijk} = -1,$$

Postać trygonometryczna

Kwaternion można przedstawić także w postaci trygonometrycznej.

$$q = |q|(\cos\theta + \vec{u}\sin\theta)$$

Postać ta składa się z części skalarnej $S(q) = |q|\cos\theta$ oraz części wektorowej $V(q) = |q|\vec{u}\sin\theta$. Wektor $\vec{u}$ jest wektorem jednostkowym.

Postać macierzowa

Kwaternion można przedstawić także w postaci macierzowej.

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{i} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{j} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{k} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$q = s \cdot \mathbf{I} + x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = \begin{bmatrix} s & x & y & z \\ -x & s & -z & y \\ -y & z & s & -x \\ -z & -y & x & s \end{bmatrix}$$

Warto zauważyć, że istnieje wiele takich reprezentacji.

Operator L_q

Dla dowolnego kwaternionu $q = \cos\theta + \vec{u}\sin\theta$ oraz dowolnego wektora trójwymiarowego $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ operator $L_q(\vec{v}) = q \cdot v \cdot \bar{q}$ jest obrotem wektora $\vec{v}$ o kąt 2θ wokół wektora $\vec{u}$ kwaternionu q, gdzie kwaternion $v = 0 + \vec{v}$.