Wzory funkcji cyklometrycznych (kołowych)

Mateusz Kowalski
www.KowalskiMateusz.pl

19.07.2012

Streszczenie

Wzory funkcji cyklometrycznych wraz z wyprowadzeniami.

1 A co to za funkcje?

Funkcje cyklometryczne lub inaczej kołowe są to funkcje odwrotne do trygonometrycznych. W literaturze trudno znaleźć te wzory jeśli już są to nie zawsze z właściwymi założeniami.

2 Wzory

2.1 Funkcje cyklometryczne przeciwnego argumentu.

$$\arcsin(-x) = -\arcsin x \tag{1}$$

$$\arccos(-x) = -\arccos x + \pi \tag{2}$$

$$\operatorname{arc\,tg}(-x) = -\operatorname{arc\,tg} x \tag{3}$$

2.2 Tożsamości funkcji cyklometrycznych.

$$\operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,ctg} x = \frac{\pi}{2} \tag{4}$$

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2} \tag{5}$$

2.3 Funkcja trygonometryczna z funkcji cyklometrycznej.

$$\sin(\arcsin x) = x, \qquad \text{bo } x \in [-1, 1] \tag{6}$$

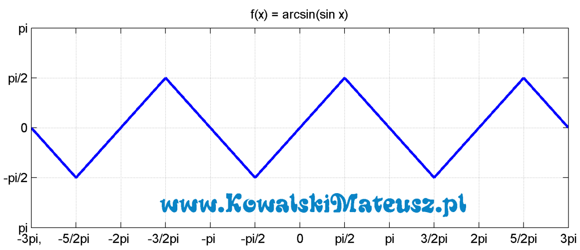
$$\cos(\arccos x) = x, \qquad \text{bo } x \in [-1, 1] \tag{7}$$

$$\tan(\operatorname{arc\,tg} x) = x, \quad \text{bez ograniczeń na } x \tag{8}$$

Czyli nic podejrzanego, bo definicja arcsin czy arccos narzuca ograniczenie na x

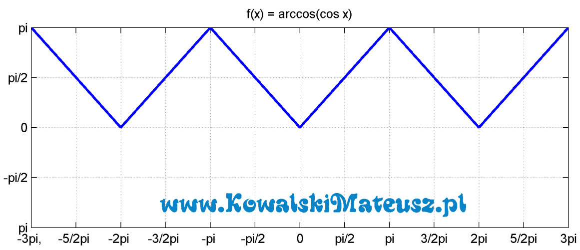
2.4 Funkcja cyklometryczna z funkcji trygonometrycznej.

$$\arcsin(\sin x) = (-1)^{\gamma}(x - \gamma\pi) \qquad \gamma = \left\lfloor \frac{x}{\pi} + \frac{1}{2} \right\rfloor \tag{9}$$



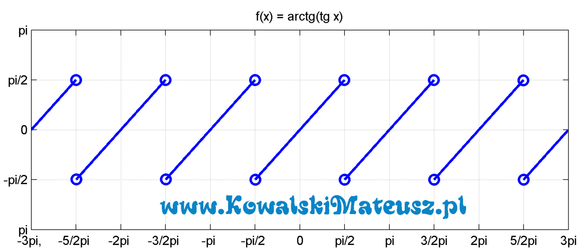
Rysunek 1: wykres funkcji $f(x) = \arcsin(\sin x)$

$$\arccos(\cos x) = (-1)^{\delta}\left(x - 2\left\lceil \frac{\delta}{2} \right\rceil \pi\right) \qquad \delta = \left\lfloor \frac{x}{\pi} \right\rfloor \tag{10}$$



Rysunek 2: wykres funkcji $f(x) = \arccos(\cos x)$

$$\operatorname{arc\,tg}(\operatorname{tg} x) = x - \gamma \cdot \pi \qquad \gamma = \left\lfloor \frac{x}{\pi} + \frac{1}{2} \right\rfloor \tag{11}$$



Rysunek 3: wykres funkcji $f(x) = \operatorname{arc\,tg}(\operatorname{tg} x)$

Gdzie:
$\lfloor x \rfloor$ To odpowiednio podłoga, czyli zaokrąglanie do liczby całkowitej w dół.
$\lceil x \rceil$ To odpowiednio sufit, czyli zaokrąglanie do liczby całkowitej w górę.

2.5 Wzory na zmianę funkcji.

$$\arccos x = \begin{cases} \arcsin \sqrt{1-x^2}, & \text{dla } x \geqslant 0 \\ \pi - \arcsin \sqrt{1-x^2}, & \text{dla } x \leqslant 0 \end{cases} \tag{12}$$

$$\arcsin x = \begin{cases} \arccos \sqrt{1-x^2}, & \text{dla } x \geqslant 0 \\ -\arccos \sqrt{1-x^2}, & \text{dla } x \leqslant 0 \end{cases} \tag{13}$$

$$\operatorname{arc\,tg} x = \begin{cases} \arcsin \sqrt{\frac{x^2}{1+x^2}}, & \text{dla } x \geqslant 0 \\ \pi - \arcsin -\sqrt{\frac{x^2}{1+x^2}}, & \text{dla } x \leqslant 0 \end{cases} \tag{14}$$

2.6 Wzory sumę funkcji cyklometrycznych.

$$\arcsin x + \arcsin y =$$

$$= \begin{cases} -\pi - \arcsin(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}), & \text{dla } y < -\sqrt{1-x^2} \wedge x, y < 0 \\ \arcsin(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}), & \text{dla pozostałych} \\ \pi - \arcsin(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}), & \text{dla } y > \sqrt{1-x^2} \wedge x, y > 0 \end{cases} \tag{15}$$

$$\arccos x + \arccos y = \begin{cases} \arccos(xy - \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}), & \text{dla } x + y > 0 \\ 2\pi - \arccos(xy - \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}), & \text{dla } x + y < 0 \end{cases} \tag{16}$$

$$\operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,tg} y = \begin{cases} -\pi + \operatorname{arc\,tg} \frac{x+y}{1-xy}, & \text{dla } xy > 1 \wedge x, y < 0 \\ \operatorname{arc\,tg} \frac{x+y}{1-xy}, & \text{dla } xy < 1 \\ \pi + \operatorname{arc\,tg} \frac{x+y}{1-xy}, & \text{dla } xy > 1 \wedge x, y > 0 \\ \frac{\pi}{2}, & \text{dla } xy = 1 \end{cases} \tag{17}$$

3 Wyprowadzenia

3.1 Wzór 1

Wyjdźmy od:

$$\alpha = \arcsin(-x)$$

Wiadomo przy tym $\alpha \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ z własności funkcji arcsin. Obkładając powyższe równanie funkcja sinus na mocy wzoru 6

$$\sin\alpha = -x$$

$$-\sin(-\alpha) = -x$$

Teraz obkładając funkcją arcsin

$$-\alpha = \arcsin x$$

Dostajemy wzór

$$\arcsin(-x) = -\arcsin(x)$$

Albo wprost z tego, że funkcja jest nieparzysta

3.2 Wzór 2

Wyjdźmy od

$$\alpha = \arccos(-x)$$

Wiadomo przy tym $\alpha \in [0, \pi]$ z własności funkcji arccos działając funkcją cos na równanie dostaniemy

$$\cos\alpha = -x$$

$$-\cos\alpha = x$$

korzystając ze wzoru redukcyjnego z trygonometrii

$$\cos(\pi - \alpha) = x$$

Działając funkcją arccos

$$\pi - \alpha = \arccos x$$

A stąd wynika już nasz wzór

$$\arccos(-x) = -\arccos x + \pi$$

□

Albo inne podejście funkcja arccos po obniżeniu o $\frac{\pi}{2}$ będzie nieparzysta, zatem

$$(\arccos x - \frac{\pi}{2}) = -(\arccos(-x) - \frac{\pi}{2})$$

skąd natychmiast dostajemy nasz wzór.

3.3 Wzór 3

Wprost z tego że jest to funkcja nieparzysta

3.4 Wzór 4

Wprost z definicji funkcji. Funkcja arc ctg po obniżeniu $\frac{\pi}{2}$ jest nieparzysta i przeciwna do funkcji $\operatorname{arc\,tg} x$.

$$\operatorname{arc\,tg} x - \frac{\pi}{2} = -\operatorname{arc\,ctg} x$$

skąd wynika wprost tożsamość.

3.5 Wzór 5

$$\arcsin x + \arccos x = ?$$

Oznaczmy przez

$$\alpha = \arcsin x$$
$$\beta = \arccos x$$

Stąd możemy napisać na mocy wzorów 6 7, że:

$$x = \sin\alpha$$
$$x = \cos\beta$$

Korzystając z jedynki trygonometrycznej.

$$|\cos\alpha| = \sqrt{1-x^2} \Rightarrow \cos\alpha = \sqrt{1-x^2}$$

$$|\sin\beta| = \sqrt{1-x^2} \Rightarrow \sin\beta = \sqrt{1-x^2}$$

Wychodząc z wzoru trygonometrycznego

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

Podstawiając

$$\sin(\alpha+\beta) = x^2 + (\sqrt{1-x^2})^2$$
$$\alpha+\beta = \arcsin 1$$
$$\alpha+\beta = \frac{\pi}{2}$$
$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$$

co należało pokazać. □

Albo z definicji funkcji arcsin i arccos obniżając funkcję arccos o $\frac{\pi}{2}$ będzie odwrotnością funkcji arcsin tzn.

$$\arccos x - \frac{\pi}{2} = -\arcsin x$$

3.6 Wzór 6

Wprost z własności funkcji sin oraz arcsin, które są odwrotne względem siebie dla kąta z zakresu $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

3.7 Wzór 7

Wprost z własności funkcji cos oraz arccos, które są odwrotne względem siebie dla kąta z zakresu $[0, \pi]$

3.8 Wzór 8

Wprost z własności funkcji tg oraz arc tg, które są odwrotne względem siebie dla kąta z zakresu $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

3.9 Wzór 9

$$\arcsin(\sin x) = \begin{cases} \dots \\ -(x-3\pi), & \text{dla } x \in [\frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}) \qquad \gamma = -3 \\ x-2\pi, & \text{dla } x \in [\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}) \qquad \gamma = -2 \\ -(x-\pi), & \text{dla } x \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}) \qquad \gamma = -1 \\ x, & \text{dla } x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \qquad \gamma = 0 \\ -(x+\pi), & \text{dla } x \in [\frac{-3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}) \qquad \gamma = 1 \\ x+2\pi, & \text{dla } x \in [\frac{-5\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}) \qquad \gamma = 2 \\ -(x+3\pi), & \text{dla } x \in [-\frac{7\pi}{2}, -\frac{5\pi}{2}) \qquad \gamma = 3 \\ \dots \end{cases}$$

Znak minus jest na zmianę więc wykorzystamy czynnik $(-1)^p$. Dopasowując by p dla odpowiednich przedziałów było parzyste, a dla innych nieparzyste (uwzględniając przypadek 0 jako parzyste).
Należy znaleźć odpowiednie przyporządkowanie przedziału do liczby całkowitej. Można to zrobić poprzez wykorzystanie podłogi lub sufitu z ewentualnym przesunięciem.
Długość przedziału wynosi π więc podzielenie $\frac{x}{\pi}$ unormuje do długości 1. A właśnie co 1 następuje zmiana w funkcji $\lfloor\ \rfloor$ dokonując przesunięcia w odpowiednią stronę o $\frac{1}{2}$ mamy:

$$\gamma = \left\lfloor \frac{x}{\pi} + \frac{1}{2} \right\rfloor$$

czynnik $(-1)^\gamma$, pasuje znakiem do przedziałów czyli $p = \gamma$. możemy napisać wzór:

$$\arcsin(\sin x) = (-1)^\gamma (x - \gamma\pi) \qquad\qquad \gamma = \left\lfloor \frac{x}{\pi} + \frac{1}{2} \right\rfloor$$

3.10 Wzór 10

rozwińmy

$$\arccos(\cos x) = \begin{cases} \dots \\ -(x+2\pi), & \text{dla } x \in (-3\pi, -2\pi) \qquad \delta = -3 \qquad \left\lceil \frac{\delta}{2} \right\rceil = -1 \\ x+2\pi, & \text{dla } x \in (-2\pi, -\pi) \qquad \delta = -2 \qquad \left\lceil \frac{\delta}{2} \right\rceil = -1 \\ -x, & \text{dla } x \in (-\pi, 0) \qquad \delta = -1 \qquad \left\lceil \frac{\delta}{2} \right\rceil = 0 \\ x, & \text{dla } x \in (0, \pi) \qquad \delta = 0 \qquad \left\lceil \frac{\delta}{2} \right\rceil = 0 \\ -(x-2\pi), & \text{dla } x \in (\pi, 2\pi) \qquad \delta = 1 \qquad \left\lceil \frac{\delta}{2} \right\rceil = 1 \\ x-2\pi, & \text{dla } x \in (2\pi, 3\pi) \qquad \delta = 2 \qquad \left\lceil \frac{\delta}{2} \right\rceil = 1 \\ \dots \end{cases}$$

Tutaj mamy trochę trudniej. Gdyż mamy "podwójne zmiany" o 2π. Można to wyrazić takim wzorem

$$\arccos(\cos x) = (-1)^\delta (x - 2\left\lceil \frac{\delta}{2} \right\rceil \pi) \qquad \delta = \left\lfloor \frac{x}{\pi} \right\rfloor$$

3.11 Wzór 11

$$\operatorname{arc\,tg}(\operatorname{tg} x) = \begin{cases} \dots \\ x-2\pi, & \text{dla } x \in (-\frac{5\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}) \qquad \gamma = -2 \\ x-\pi, & \text{dla } x \in (-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}) \qquad \gamma = -1 \\ x, & \text{dla } x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \qquad \gamma = 0 \\ x+\pi, & \text{dla } x \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}) \qquad \gamma = 1 \\ x+2\pi, & \text{dla } x \in (\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}) \qquad \gamma = 2 \\ \dots \end{cases}$$

Postępujemy analogicznie co w wyprowadzeniu we wzorze 9 dochodząc do

$$\gamma = \left\lfloor \frac{x}{\pi} + \frac{1}{2} \right\rfloor$$

a wzór się sam nasuwa

$$\operatorname{arc\,tg}(\operatorname{tg} x) = x - \gamma \cdot \pi \qquad \gamma = \left\lfloor \frac{x}{\pi} + \frac{1}{2} \right\rfloor$$

3.12 Wzór 12

Zaczynamy od

$$\arccos x = \alpha$$

Stąd wiadomym jest $\alpha \in [0, \pi]$ działając obustronnie na równanie funkcją cos

$$x = \cos\alpha$$

Z jedynki trygonometrycznej

$$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$$

$$|\sin\alpha| = \sqrt{1 - x^2}$$

Ze względu na, że $\sin\alpha \geqslant 0$ dla $\alpha \in [0, \pi]$ zatem

$$\sin\alpha = \sqrt{1 - x^2}$$

Stąd

$$\alpha = \arcsin\sqrt{1 - x^2}, \text{dla } \alpha \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

$$\alpha = \pi - \arcsin\sqrt{1 - x^2}, \text{dla } \alpha \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$$

Z uwzględnieniem założenia $\alpha \in [0, \pi]$ oraz wnioskowania

$$\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}] \Rightarrow x \geqslant 0$$

$$\alpha \in [\frac{\pi}{2}, \pi] \Rightarrow x \leqslant 0$$

Dostajemy wzór

$$\arccos y = \begin{cases} \arcsin\sqrt{1 - x^2}, & \text{dla } x \geqslant 0 \\ \pi - \arcsin\sqrt{1 - x^2}, & \text{dla } x \leqslant 0 \end{cases}$$

3.13 Wzór 13

Zacznijmy od

$$\arcsin x = \alpha$$

przy czym mamy, że $\alpha \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$$x = \sin\alpha$$

$$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$$

$$|\cos\alpha| = \sqrt{1 - \sin^2\alpha}$$

Skoro$\alpha \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, to dla takiej α $\cos\alpha \geqslant 0$

$$\cos\alpha = \sqrt{1 - x^2}$$

$$\alpha = \arccos\sqrt{1-x^2}, \text{dla } \alpha \in [0,\pi]$$
$$\alpha = -\arccos\sqrt{1-x^2}, \text{dla } \alpha \in [-\pi,0]$$

Z uwzględnieniem założenia $\alpha \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ mamy

$$\alpha \in [-\frac{\pi}{2}, 0] \Rightarrow x \leqslant 0$$
$$\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}] \Rightarrow x \geqslant 0$$

Uzyskujemy więc wzór

$$\arcsin x = \begin{cases} \arccos\sqrt{1-x^2}, \text{dla } x \geqslant 0 \\ -\arccos\sqrt{1-x^2}, \text{dla } x \leqslant 0 \end{cases}$$

3.14 Wzór 14

$$\operatorname{arc\,tg} x = \alpha, \text{dla } \alpha \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$$

Teraz działając na równanie funkcją tg mamy:

$$x = \operatorname{tg}\alpha$$
$$x = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

Z jedynki trygonometrycznej

$$|\cos\alpha| = \sqrt{1-\sin^2\alpha}$$

ze względu na zakres α możemy opuścić wartość bezwzględną.

$$\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha}$$

Podstawiając za cos uzyskamy

$$x = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$$

Pytanie jednak brzmi $\alpha =?$. Podnosimy zatem równanie do kwadratu.

$$x^2 = \frac{\sin^2\alpha}{1-\sin^2\alpha}$$
$$\sin^2\alpha(1+x^2) = x^2$$
$$|\sin\alpha| = \sqrt{\frac{x^2}{1+x^2}}$$

Teraz mamy dwie sytuację
1

$$\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}) \Rightarrow x \geqslant 0$$

$$\sin\alpha = \sqrt{\frac{x^2}{1+x^2}}$$

$$\alpha = \arcsin\sqrt{\frac{x^2}{1+x^2}}$$

formalnie jeszcze tak $\alpha = \pi - \arcsin(-\frac{x^2}{1+x^2})$, ale to odpada, bo po zakresem.
2

$$\alpha \in (-\frac{\pi}{2}, 0) \Rightarrow x < 0$$

$$\sin\alpha = -\sqrt{\frac{x^2}{1+x^2}}$$

$$\alpha = \arcsin -\sqrt{\frac{x^2}{1+x^2}}$$

, które odpada, ale mamy jeszcze

$$\pi - \arcsin -\sqrt{\frac{x^2}{1+x^2}}$$

Możemy teraz sformułować wzór:

$$\operatorname{arc\,tg} x = \begin{cases} \arcsin\sqrt{\frac{x^2}{1+x^2}}, \text{dla } x \geqslant 0 \\ \pi - \arcsin\sqrt{\frac{x^2}{1+x^2}}, \text{dla } x < 0 \end{cases}$$

3.15 Wzór 15

Szukamy wzoru:

$$\arcsin x + \arcsin y = ?$$

Oznaczmy przez

$$\alpha = \arcsin x$$
$$\beta = \arcsin y$$

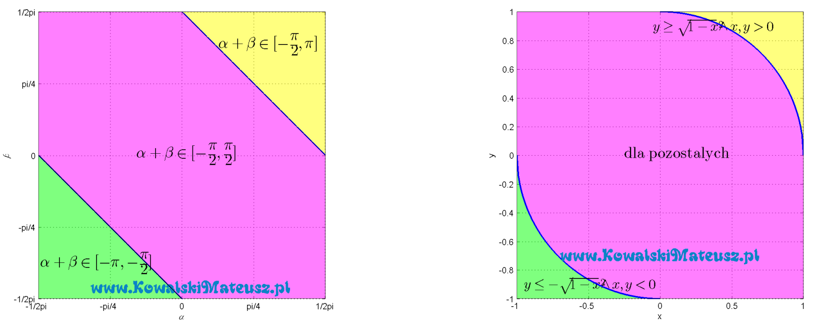
Stąd możemy napisać na mocy wzoru 6, że:

$$x = \sin\alpha$$
$$y = \sin\beta$$

Z jedynki trygonometrycznej

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

mamy, że
$$|\cos\alpha| = \sqrt{1-x^2}$$
Z definicji funkcji arcsin wynika, że $\alpha,\beta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Zatem $\cos\alpha \geqslant 0$ więc opuszczamy wartość bezwzględna $\cos\alpha = \sqrt{1-x^2}$ i analogicznie uzyskujemy $\cos\beta = \sqrt{1-y^2}$.
Wychodząc ze wzoru trygonometrycznego
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$
podstawiając uzyskujemy
$$\sin(\alpha+\beta) = x\cdot\sqrt{1-y^2} + \sqrt{1-x^2}\cdot y$$
Teraz Uwaga $\alpha+\beta \in [-\pi,\pi]$ co jest szerszym przedziałem, niż przedział wartości funkcji arcsin $\in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ zatem
$$\alpha+\beta = \begin{cases} -\pi - \arcsin(x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}), & \text{dla } \alpha+\beta \in [-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}] \\ \arcsin(x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}), & \text{dla } \alpha+\beta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ \pi - \arcsin(x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}), & \text{dla } \alpha+\beta \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}] \end{cases}$$
Co sprowadza się do, bo jeszcze raz $\alpha+\beta \in [-\pi,\pi]$
$$\alpha+\beta = \begin{cases} -\pi - \arcsin(x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}), & \text{dla } \alpha+\beta \in [-\pi, -\frac{\pi}{2}] \\ \arcsin(x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}), & \text{dla } \alpha+\beta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ \pi - \arcsin(x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}), & \text{dla } \alpha+\beta \in [\frac{\pi}{2}, \pi] \end{cases}$$
Jednak wygląda to dosyć osobliwie. Należy zatem warunki wyrazić od x



Rysunek 4: Odwzorowanie pary(α,β) w parę (x,y)

i y. $\alpha+\beta > \frac{\pi}{2}$ wynika stąd dodatkowo $\alpha,\beta > 0$, bo żadna z nich nie jest większa od $\frac{\pi}{2}$ a to zaś oznacza $x,y>0$, gdyż funkcja arcsin jest rosnąca i nieparzysta.
$$\beta > -\alpha + \frac{\pi}{2}$$
$$\arcsin y > -\arcsin x + \frac{\pi}{2}$$

Sprowadzając problem do znalezienia granicy.

$$\arcsin y = -\arcsin x + \frac{\pi}{2}$$

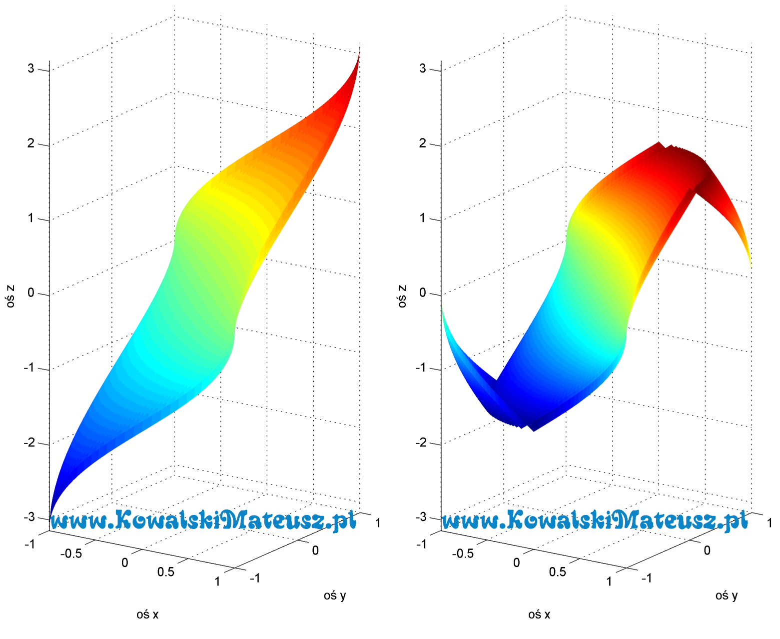
na mocy wzoru 6 mamy

$$\begin{aligned} y &= \sin(-\arcsin x + \tfrac{\pi}{2}) \\ y &= -\sin(\arcsin x - \tfrac{\pi}{2}) \\ y &= -(-\cos(\arcsin x)) \end{aligned}$$

teraz obkładając wzór numer 13 funkcją cos uzyskujemy $y = \sqrt{1-x^2}$. Wracając do nierówności. spełniona jest ona, gdy $y > \sqrt{1-x^2}$, Wynika to chociażby z tego, że funkcja arcsin jest rosnąca i nieparzysta. Pamiętając ponadto o tym iż $x, y > 0$. Analogicznie postępując z nierównością

$$\beta < -\alpha - \frac{\pi}{2}$$

dojdziemy do $y < -\sqrt{1-x^2}$ oraz $x, y < 0$ A teraz możemy zapisać nasz wzór już z warunkami na x i y.



(a) $f(x,y) = \arcsin x + \arcsin y$

(b) $f(x,y) = \arcsin(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2})$

Rysunek 5: Porównanie wygenerowanych wykresów funkcji

$$\arcsin x + \arcsin y = \begin{cases} -\pi - \arcsin(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}), & \text{dla } y < -\sqrt{1-x^2} \wedge x, y < 0 \\ \arcsin(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}), & \text{dla pozostałych} \\ \pi - \arcsin(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}), & \text{dla } y > \sqrt{1-x^2} \wedge x, y > 0 \end{cases}$$

□

3.16 Wzór 16

Szukamy wzoru:

$$\arccos x + \arccos y = ?$$

Oznaczmy przez

$$\alpha = \arccos x$$
$$\beta = \arccos y$$

Stąd możemy napisać na mocy wzoru 7, że:

$$x = \cos\alpha$$
$$y = \cos\beta$$

Z jedynki trygonometrycznej

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

mamy, że $|\sin\alpha| = \sqrt{1-x^2}$. Z definicji funkcji arccos wynika, że $\alpha, \beta \in [0, \pi]$. Zatem $\sin\alpha \geqslant 0$, więc opuszczamy wartość bezwzględna $\sin\alpha = \sqrt{1-x^2}$ i analogicznie uzyskujemy $\sin\beta = \sqrt{1-y^2}$ Wychodząc ze wzoru trygonometrycznego

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

podstawiając uzyskujemy

$$\cos(\alpha+\beta) = xy - \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}$$

Teraz Uwaga $\alpha + \beta \in [0, 2\pi]$ co jest szerszym przedziałem, niż przedział wartości funkcji arccos $\in [0, \pi]$ zatem

$$\alpha+\beta = \begin{cases} \arccos(xy - \sqrt{(1-y^2)(1-x^2)}, & \text{dla } \alpha+\beta \in [0,\pi] \\ 2\pi - \arccos(xy - \sqrt{(1-y^2)(1-x^2)}, & \text{dla } \alpha+\beta \in [\pi, 2\pi] \end{cases}$$

Jednak wygląda to dosyć osobliwie. Należy zatem warunki wyrazić od x i y. Weźmy na początek warunek $\alpha + \beta > \pi$

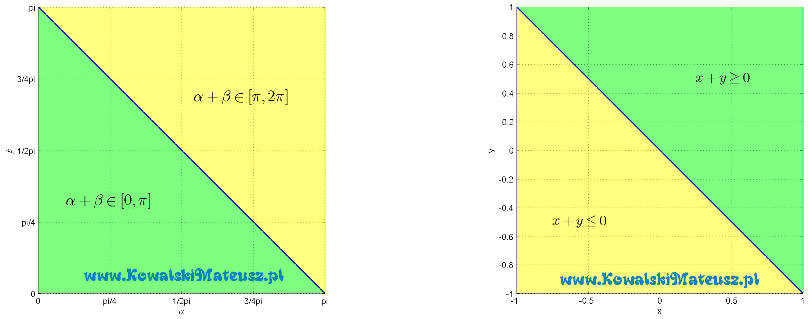
$$\beta > -\alpha + \pi$$
$$\arccos y > -\arccos x + \pi$$

Sprowadzając problem do znalezienia granicy.

$$\arccos y = -\arccos x + \pi$$

na mocy wzoru 7 mamy

$$y = \cos(-\arccos x + \pi)$$
$$y = -\cos(-\arccos x)$$
$$y = -\cos(\arccos x))$$



Rysunek 6: Odwzorowanie pary(α,β) w parę (x,y)

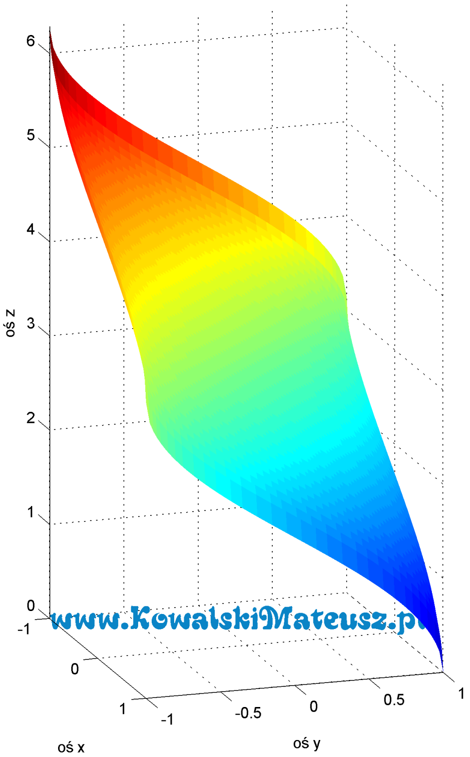
teraz na mocy wzoru 7 uzyskujemy $y=-x$. Wracając do nierówności. spełniona jest ona, gdy $y<-x$, Wynika to chociażby z tego, że funkcja arccos jest malejąca. Analogicznie postępując z nierównością odwrotną

$$\beta<-\alpha+\pi$$

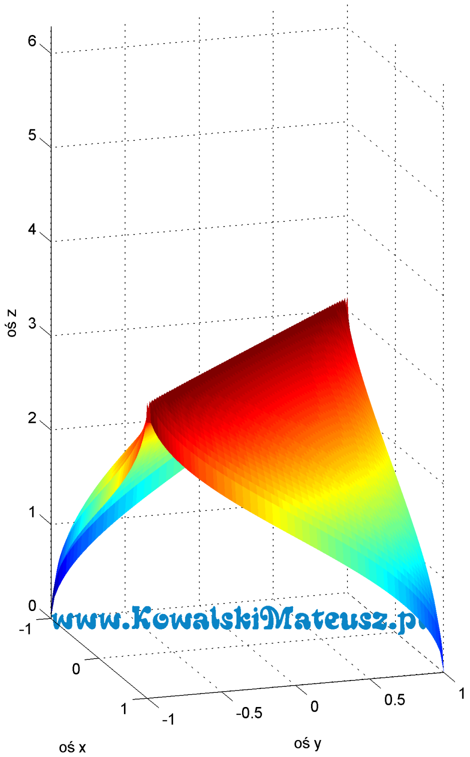
dojdziemy do $y>-x$. Teraz możemy zapisać nasz wzór już z warunkami na x i y.

$$\arccos x+\arccos y=\begin{cases}\arccos(xy-\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}), & \text{dla } x+y>0\\ 2\pi-\arccos(xy-\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}), & \text{dla } x+y<0\end{cases}$$

$\square$



(a) $f(x, y) = \arccos x + \arccos y$



(b) $f = \arccos(xy - \sqrt{(1-y^2)(1-x^2)})$

Rysunek 7: Porównanie wygenerowanych wykresów funkcji

3.17 Wzór 17

Szukamy wzoru:

$$\operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,tg} y = ?$$

Oznaczmy przez

$$\alpha = \operatorname{arc\,tg} x$$
$$\beta = \operatorname{arc\,tg} y$$

Stąd możemy napisać na mocy wzoru 8, że:

$$x = \operatorname{tg} \alpha$$
$$y = \operatorname{tg} \beta$$

Wychodząc ze wzoru trygonometrycznego

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \tfrac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}$$

podstawiając uzyskujemy

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{x + y}{1 - xy}$$

Teraz Uwaga postępujemy jak z klsaycznym równaniem trygonometrycznym

$$\gamma = \operatorname{arc\,tg} \frac{x+y}{1-xy}$$

$$\alpha + \beta = \gamma + k \cdot \pi, \text{gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

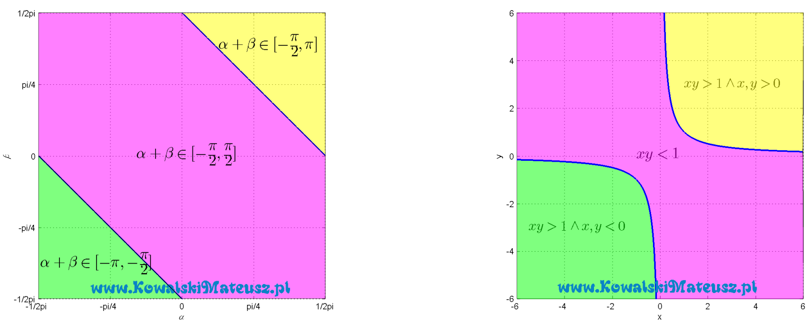
Skoro $\alpha, \beta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ zatem $\alpha + \beta \in (-\pi, \pi)$ zatem mamy takie możliwości

$$\alpha + \beta = \begin{cases} -\pi + \operatorname{arc\,tg} \frac{x+y}{1-xy}, & \text{dla } \alpha + \beta \in (-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}) \\ \operatorname{arc\,tg} \frac{x+y}{1-xy}, & \text{dla } \alpha + \beta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \\ \pi + \operatorname{arc\,tg} \frac{x+y}{1-xy}, & \text{dla } \alpha + \beta \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}) \end{cases}$$

a teraz uściślając i uwzględniając sytuację gdy $xy = 1$

$$\alpha + \beta = \begin{cases} -\pi + \operatorname{arc\,tg} \frac{x+y}{1-xy}, & \text{dla } \alpha + \beta \in (-\pi, -\frac{\pi}{2}) \\ \operatorname{arc\,tg} \frac{x+y}{1-xy}, & \text{dla } \alpha + \beta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \\ \pi + \operatorname{arc\,tg} \frac{x+y}{1-xy}, & \text{dla } \alpha + \beta \in (\frac{\pi}{2}, \pi) \\ \frac{\pi}{2}, & \text{dla } \alpha + \beta = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Teraz, aby wyglądało to bardziej elegancko wystarczy warunki wyrazić od



Rysunek 8: Odwzorowanie pary(α, β) w parę (x, y)

x i y Weźmy na początek przypadek.

$$\alpha + \beta > \frac{\pi}{2}$$

. Ponadto zauważmy, że

$$\alpha, \beta > 0 \Rightarrow x, y > 0$$

, bo

$$\alpha, \beta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$$

$$\beta > -\alpha + \frac{\pi}{2}$$

Rozpatrując najpierw równanie.

$$\beta = -\alpha + \frac{\pi}{2}$$

$$\operatorname{arc\,tg} y = -\operatorname{arc\,tg} x + \frac{\pi}{2}$$

$$y = \operatorname{tg}(-\operatorname{arc\,tg} x + \frac{\pi}{2})$$

$$y = -\operatorname{ctg}(-\operatorname{arc\,tg} x)$$

$$y = \frac{1}{\operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg} x)}$$

$$y = \frac{1}{x}$$

Wracając do nierówności mamy, że:

$$y > \frac{1}{x} \wedge x, y > 0$$

czyli

$$xy > 1 \wedge x, y > 0$$

Analogicznie z nierównością

$$\alpha + \beta < -\frac{\pi}{2}$$

Dojdziemy do

$$y < \frac{1}{x} \wedge x, y < 0$$

mnożąc przez ujemny x, znak się zmieni i mamy:

$$xy > 1 \wedge x, y < 0$$

W trzecim przypadku zaś mamy warunek

$$|\alpha + \beta| < \frac{\pi}{2}$$

co sprowadza się do dwóch nierówności. Odwrotnych niż analizowane wcześniej.

$$\alpha + \beta < \frac{\pi}{2} \wedge -\alpha - \beta > \frac{\pi}{2}$$

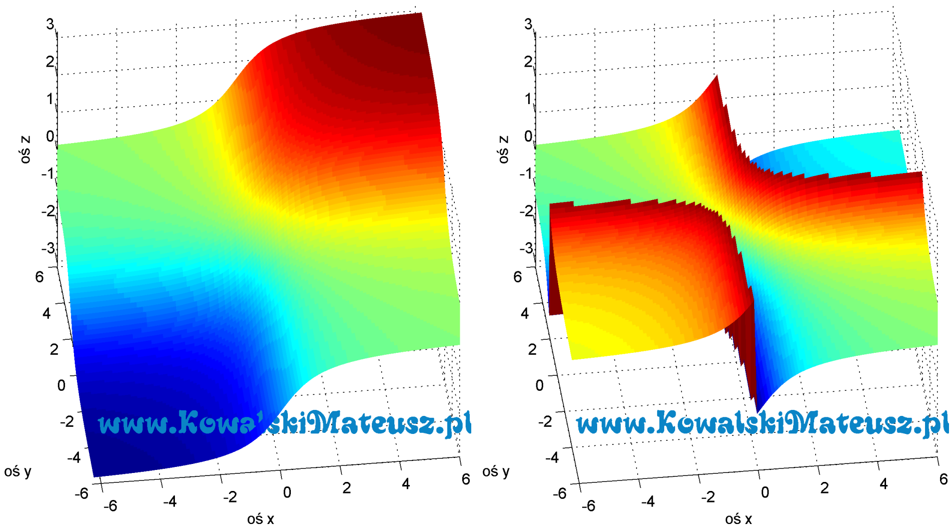
a to zaś do

$$xy < 1 \wedge x, y \in \mathbb{R}$$

Teraz możemy ostateczni napisać wzór

$$\operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,tg} y = \begin{cases} -\pi + \operatorname{arc\,tg} \frac{x+y}{1-xy}, & \text{dla } xy > 1 \wedge x, y < 0 \\ \operatorname{arc\,tg} \frac{x+y}{1-xy}, & \text{dla } xy < 1 \\ \pi + \operatorname{arc\,tg} \frac{x+y}{1-xy}, & \text{dla } xy > 1 \wedge x, y > 0 \\ \frac{\pi}{2}, & \text{dla } xy = 1 \end{cases}$$

□



(a) $f(x, y) = \operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,tg} y$

(b) $f(x, y) = \operatorname{arc\,tg} \frac{x+y}{1-xy}$

Rysunek 9: Porównanie wygenerowanych wykresów funkcji