11 Przykładów Rozkładu Macierzy Na Postać Jordana

Krok Po Kroku Przykłady z Teorią

Prezentuje

Mateusz Kowalski
Matematyk, Automatyk i Robotyk

kowalskimateusz.pl

Czy znajdziesz odpowiedzi na swoje pytania?

- Z pewnością zastanawiasz się teraz czy w tym nagraniu znajdziesz odpowiedz na swoje pytanie.
- Temat jest dosyć trudny, także żeby nie było, że nie mówiłem, chociaż wyjaśnię go najlepiej jak potrafię.
- Na niektórych kierunkach matematycznych tego nie ma
- Ta teoria jest względnie "świeża" ma zaledwie ponad 100 lat
- Jordan 1838 - 1922

Co będzie?

- Przypomnienie najważniejszych faktów
  - Macierz jako przekształcenie liniowe wektora
  - Wektory i wartości własne?
  - Wielomian i równanie charakterystyczne i widmo macierzy
  - Diagonalizacja macierzy
  - Czy zawsze macierz jest diagonalizowalna?

Co będzie?

- z pojęć nowych
  - Co ma rozkład Jordana macierzy do diagonalizacji macierzy?
  - Jak wygląda ogólny wzór rozkładu macierzy na postać Jordana?
  - Po co dokonywać rozkładu i co on daje?
  - Czym różni się zbiór wektorów własnych od przestrzeni własnej?
- W temacie samej macierzy Jordana
  - Budowa macierz $\mathbf{J}$
  - Co to jest klatka Jordana?
  - 1,2, czy 3 rodzaje klatek Jordana, czym się różnią wyglądają?
  - Czy rozkład Jordana jest jednoznaczny?
  - Co można pozamieniać, a czego niewolno?

Co będzie?

- W temacie samej macierzy Jordana
  - Co łączy klatki Jordana z wartościami własnymi?
  - Czy w rozkładzie może być kilka klatek dla jednej wartości własnej i od czego to zależy?
  - Skąd wiadomo ile będzie klatek Jordana dla danej wartości własnej?
  - Czym się różni zbiór wektorów własnych o przestrzeni własnej?
  - Czym się różni krotność algebraiczna od krotności geometrycznej, wymiaru przestrzeni własnej i z czego wywodzą się te nazwy?

Co będzie?

- Macierz **J** to nie wszystko
  - Jak budować macierz przejścia?
  - Po co są potrzebne wektory dołączone?
  - Wektory dołączone, skąd ta nazwa i czy są wektorami własnymi?
  - Jak wyznaczać wektory dołączone?
  - Czy wektory w macierzy przejścia są niezależne liniowo?
  - Co robić gdy wartość własna nie jest rzeczywista?
  - Trzeci rodzaj klatek Jordana
  - Czym się różni rozkład macierzy o elementach zespolonych na postać Jordana?
  - Potęgowanie klatek Jordana?
  - Funkcja macierzowa

Struktura Nagrania

- Zgodnie z obietnicą będą to przykłady z teorią, więc najpierw pokażę Ci jak się to robi, a na koniec podsumujemy teorią.
- Dla ustalenia uwagi będę mówił tylko o macierz z elementami rzeczywistymi. Ponadto dla zespolonych postępujemy bardzo analogicznie.
- W końcowej części pojawią się nawiązania do jądra odwzorowania liniowego
- Mimo obszernego planu i szczerych chęci, obawiam się, iż temat i tak niezostanie wyczerpany

Co nie jest konieczne

Nie jest konieczna znajomość:

- Przekształcenia liniowego
- Definicji formalnej przestrzeni liniowej
- Bazy i macierzy przejścia (zmiany bazy)
- Jądra i obrazu przekształcenia liniowego

Chociaż łatwiej będzie ze znajomością.

Dla kogo jest ten materiał

Jest dla osób:

- Gotowych do skupienia
- Chcących zrozumieć i nauczyć się tak często omijanego tematu jakim jest rozkład Jordana macierzy.
- Ciekawych świata
- Zajmujący się teorią sterowania
- Dla inżynierów, zajmujących się inżynierią u ”podstaw”
- Które nie chcą być niewolnikiem programu komputerowego, który wszystko oblicza.

Dla kogo nie jest ten materiał

Nie jest dla osób:

- nie potrafiących pomnożyć macierzy
- nie potrafiących obliczyć wyznacznik dowolnego stopnia
- nie potrafiących odwrócić macierzy
- nie potrafiących rozwiązać szkolnego równania wielomianowego
- nie rozumiejących przestrzeni, chociaż na poziomie szkolnym
- nie znających pojęcia kombinacji liniowej wektorów*
- nie jest dla osób preferujących język i styl akademicki
- nastawionych negatywnie i agresywnie, negujących wszystko i wszystkich

Dlaczego nagrywam

- Zdaje sobie sprawę, że temat jest bardzo niszowy i marketingowo strzelam sobie trochę w stopę.
- Mimo to czuje moralny obowiązek podzielenia się tymi informacji, bo też trudno znaleźć je i zebrać do kupy, gdyż są porozrzucane po internecie.
- A niektóre materiały są trudne do zrozumienia przez początkujących

Po co robimy rozkład Jordana

- Aby łatwo i szybko obliczać potęgi wysokiego stopnia z dowolnej macierzy. $\mathbf{A}^{200}$
- Aby obliczać $e^{\mathbf{A}}$ do macierzy
- Aby obliczać pierwiastek macierzowy
- Aby obliczać dowolną funkcję od macierzy, która jest rozwijalna w szereg Taylora.
- Zastosowanie przy rozwiązywaniu układu równań różniczkowych
- Zastosowanie w zaawansowanej teorii sterowania.
- W mechanice kwantowej

Macierz Jako przekształcenie liniowe

- Wektor $\mathbf{v}$ przekształcamy zgodnie z przekształceniem liniowym φ na wektor $\mathbf{w}$

$$\varphi(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$$

- To przekształcenie możemy zastąpić macierzą i vice versa, tzn. dowolną macierz, możemy interpretować jako przekształcenie liniowe wektora, na inny wektor.
- W rachunku macierzowym wykorzystam mnożenie macierzy

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{w}$$

Wektor własny

- Pytamy czy jest taki wektor, że po przekształceniu będzie to ten sam wektor lub ewentualnie o zmienionej długości lub zwrocie.
- Wektor taki nazywamy wektorem własnym dla danego przekształcenia liniowego (macierzy).
- Bo są to wektory odporne na to przekształcenie, stąd nazwa wektory własne, bo zdeterminowane przez to dane przekształcenie.

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$$

- Przy czym wykluczamy tu wektor zerowy $\mathbf{v} \neq 0$

Wartość własna

- Tę liczbę skalującą oznaczamy przez λ i nazywamy wartością własną. Liczba ta już może być 0.
- To zagadnienie szukania wartości i wektorów własnych nazywa się zagadnieniem własnym.

Zagadnienie własne

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}$$

- Przekształcając można zapisać $\left(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}\right)\mathbf{v} = \mathbf{0}$
- To co jest istotne, to że dany wektor własny jest przypisany danej wartości własnej
- A takich par wartość własna wektor własny jest wiele dla danego przekształcenia liniowego

$$\left(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}\right)\mathbf{v} = \mathbf{0} \qquad \Rightarrow \qquad \det\left(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}\right) = 0$$

- Chcąc znaleźć wartości i wektory własne najpierw znajdujemy wartości własne.

$$\det\left(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}\right) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad w(\lambda) = 0$$

Diagonalizacja

- Diagonalizacja polega na tym, że daną macierz $\mathbf{A}$ chcemy zapisać w postaci $\mathbf{W}\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{W}^{-1}$, tzn.

$$\mathbf{A} = \mathbf{W}\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{W}^{-1},$$

  Gdzie $\boldsymbol{\Lambda}$ jest macierzą diagonalną.
- Nie każda macierz daje się tak zapisać, czyli nie każda macierz jest diagonalizowalna.
- Jeżeli wszystkie wartości własne, są jednokrotne, to taka macierz jest diagonalizowalna. Uwaga na zespolone wartości własne

Diagonalizacja

- Okazuje się, że wektory i wartości własne są bardzo pomocne przy znalezieniu $\mathbf{W}\mathbf{\Lambda}\mathbf{W}^{-1}$
- Wystarczy zbudować macierz $\mathbf{\Lambda}$ układając na przekątnej wartości własne.
- Macierz $\mathbf{W}$ budujemy wstawiając, odpowiadające wektory własne, w tej samej kolejności, co wartości własnym w macierz $\mathbf{\Lambda}$

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \qquad \mathbf{W} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_n \end{bmatrix}$$

Digonalizowalność

- Jednak jeśli wartości własne nie są jednokrotne to bywa różnie. Czasami macierz jest diagonalizowalna a czasami nie.
- Dokładne omówienie kiedy to jest możliwe, a kiedy nie będziemy dalej dyskutować w tym nagraniu.
- Okazuje się jednak, że każdą macierz można zapisać w postaci Jordana, czyli w zasadzie jest to uogólnienie diagonalizacji.

Rozkład Jordana

- Na pierwszy rzut oka wygląda bardzo podobnie

$$\mathbf{A} = \mathbf{W}\mathbf{J}\mathbf{W}^{-1},$$

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_1 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_2 & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{K}_q \end{bmatrix} \qquad \mathbf{K}_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_i & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_i \end{bmatrix},$$

  gdzie $i \in \{1, 2, \dots q\} \quad q \leqslant n,$

- Jednak teraz Macierz $\mathbf{J}$ nie jest diagonalna.
- Macierz $\mathbf{K}_i$ są nazywane klatkami i są różnych stopni.

Rozkład Jordana

- Macierz **J** przypomina macierz diagonalną jednak nią nie jest.
- W istocie składa się z macierzy blokowych o różnych rozmiarach.
- Na przekątnej znajdują się tak zwane klatki, a pozą nią są tylko 0.
- Te klatki zawsze są macierzami kwadratowymi.
- Klatki są dwojakie w zasadzie trojakie, ale po kolei.
- Klatka może być po prostu macierzą 1×1, czyli pojedynczą liczbą.
$$\mathbf{K}_i = [\lambda_i]$$

Diagonalizacja a Rozkład Jordana

- Dla danej wartości własnej też może być wiele klatek.
- Jeżeli macierz $\mathbf{J}$ składa się tylko z pojedynczych klatek to wówczas rozkład Jordana daje nam rozkład diagonalny.
- To jednak bardzo szczególny przypadek, jeśli mamy chociaż jedną wartość własną wielokrotną to niekoniecznie tak musi być.
- Oczywiście pojawia się pytanie jaką klatkę należy wybrać czy jest jeden sposób takiego wyboru itp.

Przykład 1 - wielomian

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

- Wyznaczamy wielomian charakterystyczny

$$\det\left(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}\right) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ -4 & 4-\lambda & 0 \\ -2 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(4-\lambda)(2-\lambda)+4(2-\lambda) =$$

$$= (2-\lambda)(-4\lambda + \lambda^2 + 4) =$$

$$= (2-\lambda)(\lambda-2)^2 = -(\lambda-2)^3$$

Przykład 1 - wartości własne

- wielomian charakterystyczny

$$\det\left(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}\right) = -(\lambda - 2)^3$$

- Wartości własne

$$\det\left(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 2$$

- Krotność algebraiczna wynosi 3

Przykład 1 - Wektory własne

- Zagadnienie własne to $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}$
- Jest to inaczej szukanie jądra, ale przekształcenia $\mathbf{A} - 2\mathbf{I}$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0-2 & 1 & 0 \\ -4 & 4-2 & 0 \\ -2 & 1 & 2-2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Cały układ sprowadza się do jednego równania $-2x + y = 0$
- Wektor własny ogólnie możemy zapisać tak $\begin{bmatrix} \alpha \\ 2\alpha \\ \beta \end{bmatrix}$,

  $\alpha^2 + \beta^2 > 0$

Zbiór wektorów własnych i przestrzeń własna

- Zbiór wektorów własnych dla $\lambda = 2$ to
$$\left\{ \begin{bmatrix} \alpha \\ 2\alpha \\ \beta \end{bmatrix} : \alpha^2 + \beta^2 > 0 \wedge \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$$
- Przestrzeń własna dla $\lambda = 2$ to
$$\left\{ \begin{bmatrix} \alpha \\ 2\alpha \\ \beta \end{bmatrix} : \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$$
- Przestrzeń własna różni się tym od zbioru wektorów własnych, że ma dodatkowo wektor zerowy, musi go mieć, bo inaczej nie była by to przestrzeń.

Jakie klatki oraz jaka ich liczba?

- Przestrzeń własna jest przestrzenią dwu wymiarową, tzn.

$$\dim\left(\left\{\begin{bmatrix}\alpha\\2\alpha\\\beta\end{bmatrix} : \alpha,\beta\in\mathbb{R}\right\}\right)=2$$

- Zatem będą dwie klatki Jordana
- Skoro krotność algebraiczna wynosi 3 tzn. że musimy mieć jedną klatkę stopnia 1 i jedną klatkę stopnia 2, tzn.

$$\begin{bmatrix}2&1\\0&2\end{bmatrix} \text{ oraz } \begin{bmatrix}2\end{bmatrix}$$

- Bo suma ich stopni musi być równa 3.

Za mało wektorów własnych

- Na daną chwilę dysponujemy dwoma niezależnymi liniowo wektorami własnymi

$$\left\{ \begin{bmatrix} \alpha \\ 2\alpha \\ \beta \end{bmatrix} : \alpha^2 + \beta^2 > 0 \wedge \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$$

- na przykład

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{oraz} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Natomiast my potrzebujemy 3 wektorów by zbudować macierz **W**

Jak z 2 wektorów zbudować macierz **W**?

- Jak zbudować macierz **W**

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & ? \\ 2 & 0 & ? \\ 0 & 1 & ? \end{bmatrix}$$

- Potrzebujemy jej do

$$\mathbf{W} \cdot \mathbf{J} \cdot \mathbf{W}^{-1}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & ? \\ 2 & 0 & ? \\ 0 & 1 & ? \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & ? \\ 2 & 0 & ? \\ 0 & 1 & ? \end{bmatrix}^{-1}$$

Wektor dołączony

- Skoro wiemy, że mamy klatkę stopnia 2, to będziemy dla niej potrzebowali dwa wektory.
- Chodzi o dwa wektory, które trzeba wstawić do macierz przejścia $\mathbf{W}$.
- Potrzeba zatem zrobić z jednego wektora własnego jeden dodatkowy wektory.
- Ten wektor nie będzie już wektorem własnym, ale nadawać się będzie do macierzy $\mathbf{W}$.
- Ten "lewy" wektor nazywa się wektorem dołączonym lub wektorem głównym.

Wektor dołączony

- Pamiętajmy, że macierz $\mathbf{W}$ będzie odwracana, więc macierz $\mathbf{W}$ musi mieć wyznacznik niezerowy

$$\det(\mathbf{W}) \neq 0$$

- To się sprowadza do pytania czy taki wektor będzie niezależny liniowo z pozostałymi wektorami własnymi?
- Okazuje się, że na szczęście będzie niezależny liniowo i to zawsze.

Wektor dołączony

- Aby go znaleźć postępujemy bardzo podobnie.

$$\begin{bmatrix} 0-2 & 1 & 0 \\ -4 & 4-2 & 0 \\ -2 & 1 & 2-2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- tym razem zamiast wektora zerowego wstawiamy wektor własny, z którego chcemy wyprodukować ten nowy "lewy" wektor

$$\begin{cases} y = 2x \\ -2x + y = 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \text{ układ sprzeczny}$$

- Czyżby coś było nie tak?

Wektor dołączony

- Spróbujmy z drugiego wektora własnego.

$$\begin{bmatrix} 0-2 & 1 & 0 \\ -4 & 4-2 & 0 \\ -2 & 1 & 2-2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Teraz mamy układ

$$\begin{cases} -2x + y = 1 \\ -4x + 2y = 2 \\ -2x + y = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \text{układ sprzeczny}$$

- Znów mamy problem?

Wektor dołączony

- Spróbujmy na dowolnym wektorze własnym z tej przestrzeni własnej.

$$\begin{bmatrix} 0-2 & 1 & 0 \\ -4 & 4-2 & 0 \\ -2 & 1 & 2-2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ 2\alpha \\ \beta \end{bmatrix}$$

- Teraz mamy układ

$$\begin{cases} -2x + y = \alpha \\ -4x + 2y = 2\alpha \\ -2x + y = \beta \end{cases} \Rightarrow \alpha = \beta$$

- $\alpha = \beta$ tylko wtedy istniej wektor dołączony

wektor dołączony

- Układ sprowadził się do

$$y = \alpha + 2x \quad \text{oraz } \alpha = \beta$$

- Wektor dołączony można w ogólności zapisać tak

$$\begin{bmatrix} \gamma \\ \alpha + 2\gamma \\ \epsilon \end{bmatrix}$$

- Mamy następujący Łańcuch Jordana

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ 2\alpha \\ \beta \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \gamma \\ \alpha + 2\gamma \\ \epsilon \end{bmatrix}_{\beta = \alpha}$$

Łańcuch Jordana i podstawianie

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ 2\alpha \\ \beta \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \gamma \\ \alpha + 2\gamma \\ \epsilon \end{bmatrix}_{\beta = \alpha}$$

- Aby utworzyć parę wektorów dla klatki stopnia 2

$$\alpha = 1 = \beta, \quad \gamma = 0 \quad \epsilon = 0$$

- Dostaniemy konkretny wektor własny i wektor dołączony do niego

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \text{powstaje ''bloczek''} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Jaki wektor dla klatki stopnia 1 wybrać?

- Dla drugiej klatki, stopnia pierwszego, wystarczy wziąć jakikolwiek wektor własny.
- Oczywiście z tej przestrzeni własnej no i taki, który będzie niezależny liniowo do tego użytego już wektora własnego, czyli do tego $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$
- np. $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \leftarrow \begin{bmatrix} \alpha \\ 2\alpha \\ \beta \end{bmatrix}$
- Teraz możemy zapisać rozkład Jordana macierz

Rozkład Jordana

$$\mathbf{A} = \mathbf{W} \cdot \mathbf{J} \cdot \mathbf{W}^{-1} \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathbf{J} = \mathbf{W}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{W}$$

- W wyniku naszej pracy wytworzyliśmy rozkład Jordana

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1}$$

Przykład 2 wielomian charakterystyczny

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{bmatrix} \qquad \det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 & 3 \\ -2 & -6-\lambda & 13 \\ -1 & -4 & 8-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= -(1-\lambda)(6+\lambda)(8-\lambda)+39+24-3(6+\lambda)+52(1-\lambda)-6(8-\lambda) =$$

$$= -(1-\lambda)(6+\lambda)(8-\lambda)+63-18-3\lambda+52-52\lambda-48+6\lambda =$$

$$= -(1-\lambda)(6+\lambda)(8-\lambda)+49(1-\lambda) = (1-\lambda)(\lambda^2-2\lambda+1)$$

Przykład 2 wartości własne i wektory własne

- $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 1$ krotność 3
- dla $\lambda = 1$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{bmatrix} \qquad (\mathbf{A} - 1 \cdot \mathbf{I})\mathbf{v} = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & -3 & 3 \\ -2 & -7 & 13 \\ -1 & -4 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -3y + 3z = 0 \Rightarrow z = y \\ -2x - 7y + 13z = 0 & \Rightarrow x = 3y \\ -x - 4y + 7z = 0 \end{cases}$$

Przykład 2 - Wektor własny

- Wektor własny jest postaci

$$\begin{bmatrix} 3\alpha \\ \alpha \\ \alpha \end{bmatrix}$$

- Wymiar tej przestrzeni własnej jest 1, więc będzie jedna klatka Jordan
- Teraz przejdźmy do wyliczamy wektorów dołączonych

Przykład 2 - Wektor dołączony

$$\begin{bmatrix} 0 & -3 & 3 \\ -2 & -7 & 13 \\ -1 & -4 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\alpha \\ \alpha \\ \alpha \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -3y + 3z = 3\alpha \Rightarrow z = y + \alpha \\ -2x - 7y + 13z = \alpha \;\Rightarrow\; -2x + 6y + 13\alpha = \alpha \\ -x - 4y + 7z = \alpha \;\Rightarrow\; -x + 3y + 7\alpha = \alpha \end{cases}$$

- Wychodzi zatem $x = 3y + 6\alpha$ oraz $z = y + \alpha$

$$\begin{bmatrix} 3\beta + 6\alpha \\ \beta \\ \beta + \alpha \end{bmatrix}$$

Przykład 2 - Wektor dołączony

$$\begin{bmatrix} 0 & -3 & 3 \\ -2 & -7 & 13 \\ -1 & -4 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\beta + 6\alpha \\ \beta \\ \beta + \alpha \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -3y + 3z = 3\beta + 6\alpha \Rightarrow z = y + \beta + 2\alpha \\ -2x - 7y + 13z = \beta \ \Rightarrow \ x = 3y + 6\beta + 13\alpha \\ -x - 4y + 7z = \beta + \alpha \ \Rightarrow \ x = 3y + 6\beta + 13\alpha \end{cases}$$

- Wektor dołączony jest postaci

$$\begin{bmatrix} 3\gamma + 6\beta + 3\alpha \\ \gamma \\ \gamma + \beta + 2\alpha \end{bmatrix}$$

Wybieranie wektorów dla macierzy przejścia

- Łańcuch Jordana wygląda tak

$$\begin{bmatrix} 3\alpha \\ \alpha \\ \alpha \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 3\beta + 6\alpha \\ \beta \\ \beta + \alpha \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 3\gamma + 6\beta + 3\alpha \\ \gamma \\ \gamma + \beta + 2\alpha \end{bmatrix}$$

- Wybieram np. $\alpha = 1 \neq 0, \beta = 0, \gamma = 0$ rozkład wygląda tak

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \mathbf{A}$$

Można też inaczej wybrać

- Łańcuch Jordana wygląda tak

$$\begin{bmatrix} 3\alpha \\ \alpha \\ \alpha \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 3\beta + 6\alpha \\ \beta \\ \beta + \alpha \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 3\gamma + 6\beta + 3\alpha \\ \gamma \\ \gamma + \beta + 2\alpha \end{bmatrix}$$

- Równie dobrze $\alpha = 1, \beta = -1, \gamma = 1$ rozkład wygląda tak

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \mathbf{A}$$

Co by się stało?

- A gdyby policzyć następny wektor dołączony

$$\begin{bmatrix} 0 & -3 & 3 \\ -2 & -7 & 13 \\ -1 & -4 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\gamma + 6\beta + 3\alpha \\ \gamma \\ \gamma + \beta + 2\alpha \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -3y + 3z = 3\gamma + 6\beta + 13\alpha \Rightarrow z = y + \gamma + 2\beta + \frac{13}{3}\alpha \\ -2x - 7y + 13z = \gamma \ \Rightarrow \ x = 3y + 6\gamma + 13\beta + \frac{13^2}{3}\alpha \\ -x - 4y + 7z = \gamma + \beta + 2\alpha \ \Rightarrow \ x = 3y + 6\gamma + 13\beta + \frac{13 \cdot 7 - 6}{3}\alpha \end{cases}$$

- Sprzeczność

Przykład 3

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{bmatrix} \qquad \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -5 & 2 \\ 5 & -7-\lambda & 3 \\ 6 & -9 & 4-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= -(4-\lambda)^2(7+\lambda) - 90 - 90 + 12(7+\lambda) + 27(4-\lambda) + 25(4-\lambda) =$$

$$= -(4-\lambda)(28 - 3\lambda - \lambda^2 - 52) - 180 + 70 + 14 + 12\lambda =$$

$$= \lambda^2(-\lambda + 1)$$

- Przejdźmy do równania charakterystycznego

Przykład 3 wartości własne i wektory własne

- $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 1$ krotność algebraiczna 1
- dla $\lambda = 1$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{bmatrix} \qquad (\mathbf{A} - 1 \cdot \mathbf{I})\mathbf{v} = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 5 & -8 & 3 \\ 6 & -9 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 3y - 5z + 2z = 0 \Rightarrow z = \frac{5y-3x}{2} \\ 5x - 8y + 3z = 0 \Rightarrow 5x - 8y + \frac{15y-9x}{2} = 0 \Rightarrow x - y = 0 \\ 6x - 9y + 3z = 0 \Rightarrow 6x - 9y + \frac{15y-9x}{2} = 0 \Rightarrow 3x - 3y = 0 \end{cases}$$

$$z = y = x$$

Przykład 3 - Wektor własny

- wektor własny jest postaci

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha \\ \alpha \end{bmatrix} \qquad \alpha \neq 0$$

- Wymiar tej przestrzeni jest 1, więc będzie jedna klatka Jordan
- Tak jest zawsze dla krotności algebraicznej równej 1

Przykład 3 wartości własne i wektory własne

- $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) \quad \Rightarrow \quad \lambda = 0$ krotność 2
- dla $\lambda = 0$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{bmatrix} \qquad (\mathbf{A} - 0 \cdot \mathbf{I})\mathbf{v} = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 4x - 5y + 2z = 0 \Rightarrow 2z = 5y - 4x \Rightarrow z = \frac{5y-4x}{2} \\ 5x - 7y + 3z = 0 \Rightarrow 5x - 7y + \frac{15y-12x}{2} = 0 \Rightarrow -2x - y = 0 \\ 6x - 9y + 4z = 0 \Rightarrow 6x - 9y + 10y - 8x = 0 \Rightarrow y - 2x = 0 \end{cases}$$

$$y = 2x$$
$$z = 3x$$

Przykład 3 - Wektor własny

- Wektor własny jest postaci

$$\begin{bmatrix} \beta \\ 2\beta \\ 3\beta \end{bmatrix}$$

- Wymiar tej przestrzeni jest 1, więc będzie jedna klatka Jordan
- Krotność algebraicznych $\lambda = 0$ wynosi 2, więc będzie klatka stopnia 2
- Teraz przejdźmy do wyliczamy wektorów dołączonych

Przykład 3 - Wektor dołączony

$$\begin{bmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta \\ 2\beta \\ 3\beta \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 4x - 5y + 2z = \beta \Rightarrow 2z = \beta - 4x + 5y \\ 5x - 7y + 3z = 2\beta \ \Rightarrow \ 5x - 7y + \frac{3\beta - 12x + 15y}{2} - 2\beta = 0 \\ 6x - 9y + 4z = 3\beta \ \Rightarrow \ 6x - 9y + 2\beta - 8x + 10y - 3\beta = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2x + y - \beta = 0 \Rightarrow y = \beta + 2x \\ z = 3\beta + 3x \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \gamma \\ \beta + 2\gamma \\ 3\beta + 3\gamma \end{bmatrix}$$

Wybieranie wektorów dla macierzy przejścia

- Łańcuch Jordana wygląda tak

$$\begin{bmatrix}\beta\\2\beta\\3\beta\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}\gamma\\\beta+2\gamma\\3\beta+3\gamma\end{bmatrix}$$

- Wybieramy $\beta = 1, \gamma = 0$, rozkład wygląda tak

$$\begin{bmatrix}1&1&0\\1&2&1\\1&3&3\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}1&1&0\\1&2&1\\1&3&3\end{bmatrix}^{-1} = \mathbf{A} = \begin{bmatrix}4&-5&2\\5&-7&3\\6&-9&4\end{bmatrix}$$

Przykład 4 wielomian charakterystyczny

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 3-\lambda & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} \cdot (2-\lambda)^2 =$$

$$= ((1-\lambda)(3-\lambda)+1)(2-\lambda)^2 =$$

$$= (3 - 4\lambda + \lambda^2 + 1)(2-\lambda)^2 = (\lambda - 2)^4$$

Przykład 4 wartości własne i wektory własne

- $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) \quad \Rightarrow \quad \lambda = 2$ krotność algebraiczna 4
- dla $\lambda = 2$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad (\mathbf{A} - 2 \cdot \mathbf{I})\mathbf{v} = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$-x + y - w = 0 \Rightarrow w = -x + y$$

Przykład 4 - Wektor własny

- Wektor własny jest postaci

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ -\alpha+\beta \end{bmatrix}$$

- Więc będą 3 klatki Jordan
- Skoro suma stopni wynosi 4, to będą 3 klatki stopnia 1 i jedna klatka stopnia 2
- Teraz przejdźmy do wyliczamy wektorów dołączonych

Przykład 4 - Wektor dołączony

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ -\alpha + \beta \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -x + y - w = \alpha \\ -x + y - w = \beta \\ \gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = \beta$$

- Wychodzi zatem $w = -x + y - \alpha$

$$\begin{bmatrix} \delta \\ \omega \\ \eta \\ -\delta + \omega - \alpha \end{bmatrix}$$

Wybieranie wektorów dla macierzy przejścia

- Łańcuch Jordana wygląda tak

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ -\alpha+\beta \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \delta \\ \omega \\ \eta \\ -\delta+\omega-\alpha \end{bmatrix}_{\substack{\beta=\alpha \\ \gamma=0}}$$

- Wybieramy $\alpha = 1, \beta = 1$ rozkład wygląda tak

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = \mathbf{A}$$

Przykład 5 wielomian charakterystyczny

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 9 & -6 \\ -1 & 3 & 11 & -7 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 9 & -6 \\ -1 & 3-\lambda & 11 & -7 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (2-\lambda)^2(3 - 4\lambda + \lambda^2 + 1) = (2-\lambda)^2(\lambda-2)^2 = (2-\lambda)^4$$

Przykład 5 wartości własne i wektory własne

- $\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}) \quad \Rightarrow \quad \lambda = 2$ krotność 4
- dla $\lambda = 2$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 9 & -6 \\ -1 & 3 & 11 & -7 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad (\mathbf{A} - 2 \cdot \mathbf{I})\mathbf{v} = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 & 9 & -6 \\ -1 & 1 & 11 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -x + y + 9z - 6w = 0 \Rightarrow y = x - 9z + 6w \\ -x + y - 11z - 7w = 0 \Rightarrow y = x - 11z + 7w \end{cases}$$

$$-11z + 7w = -9z + 6w \Rightarrow w = 2z$$

$$y = x + 3z$$

Przykład 5 - Wektor własny

- Wektor własny jest postaci

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha + 3\beta \\ \beta \\ 2\beta \end{bmatrix}$$

- Więc będą 2 klatki Jordan
- Skoro suma stopni wynosi 4 to:
  - 2 klatki stopnia 2
  - po jednej klatce stopnia 1 i 3
- Okaże się w trakcie
- Teraz przejdźmy do wyliczamy wektorów dołączonych

Przykład 5 - Wektor dołączony

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 9 & -6 \\ -1 & 1 & 11 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha + 3\beta \\ \beta \\ 2\beta \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -x + y + 9z - 6w = \alpha \Rightarrow y = x - 9z + 6w + \alpha \\ -x + y + 11z - 7w = \alpha + 3\beta \Rightarrow y = x - 11z + 7w + \alpha + 3\beta \\ 0 = \beta \qquad\qquad\qquad\qquad 2z = w + 3 \cdot 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} w = 2z \\ y = x + 3z + \alpha \end{cases} \qquad \text{Wówczas} \begin{bmatrix} \gamma \\ \gamma + 3\delta + \alpha \\ \delta \\ 2\delta \end{bmatrix}$$

Przykład 5 - Wektor dołączony

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 9 & -6 \\ -1 & 1 & 11 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma \\ \gamma + 3\delta + \alpha \\ \delta \\ 2\delta \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -x + y + 9z - 6w = \gamma \quad \Rightarrow \quad y = x - 9z + 6w + \gamma \\ -x + y + 11z - 7w = \gamma + 3\delta + \alpha \quad \Rightarrow \quad y = x - 11z + 7w + \gamma + \alpha \\ 0 = \delta \end{cases}$$

$$-9z + 6w = -11z + 7w + \alpha$$

$$\begin{cases} w = 2z - \alpha \\ y = x + 3z - 6\alpha + \gamma \end{cases}$$

Przykład 5 - Wektor dołączony

$$\begin{cases} w = 2z - \alpha \\ y = x + 3z - 6\alpha + \gamma \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{bmatrix} \omega \\ \omega + 3\varphi - 6\alpha + \gamma \\ \varphi \\ 2\varphi - \alpha \end{bmatrix}$$

- Nie szukam dalej, bo już widać, że będzie klatka stopnia przynajmniej 3.
- Skoro tak to wnioskujemy, iż będzie po jednej klatce stopnia 3 i 1

Wybieranie wektorów dla macierzy przejścia

- Łańcuch Jordana wygląda tak:

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha + 3\beta \\ \beta \\ 2\beta \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \gamma \\ \gamma + 3\delta + \alpha \\ \delta \\ 2\delta \end{bmatrix}_{\beta = 0} \to \begin{bmatrix} \omega \\ \omega + 3\varphi - 6\alpha + \gamma \\ \varphi \\ 2\varphi - \alpha \end{bmatrix}_{\substack{\beta = 0 \\ \delta = 0}}$$

- Dla $\alpha = 1$ klatki stopnia 3, dla $\beta = 1$ klatka stopnia 1
- Rozkład wygląda tak

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & -6 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & -6 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = \mathbf{A}$$

Przykład 6 wielomian charakterystyczny

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -4 & -7 \\ -1 & 1 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & -4 & -7 \\ -1 & 1-\lambda & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 4-\lambda & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (3-4\lambda+\lambda^2+1)\cdot(-4\lambda+\lambda^2+4)^2 = (2-\lambda)^2(\lambda-2)^2 = (2-\lambda)^4$$

Przykład 6 wartości własne i wektory własne

- $\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}) \quad \Rightarrow \quad \lambda = 2$ krotność 4
- dla $\lambda = 2$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -4 & -7 \\ -1 & 1 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\mathbf{A}-2\cdot\mathbf{I})\mathbf{v} = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -4 & -7 \\ -1 & -1 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x + y - 4z - 7w = 0 \\ -x - y + 5z + 9w = 0 \\ z = -2w \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + w = 0 \\ -x - y - w = 0 \end{cases}$$

$$y = -w - x$$

$$z = -2w$$

Przykład 6 - Wektor własny

- Wektor własny jest postaci

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ -\alpha - \beta \\ -2\beta \\ \beta \end{bmatrix}$$

- Więc będą 2 klatki Jordan
- Skoro suma stopni wynosi 4 to:
  - 2 klatki stopnia 2
  - po jednej klatce stopnia 1 i 3
- Okaże się w trakcie
- Teraz przejdźmy do wyliczamy wektorów dołączonych

Przykład 6 - Wektor dołączony

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -4 & -7 \\ -1 & -1 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ -\alpha - \beta \\ -2\beta \\ \beta \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x + y - 4z - 7w = \alpha \\ -x + y + 5z + 9w = -\beta - \alpha \\ 2z + 4w = -2\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + w + 4\beta = \alpha \\ -x - y - w - 5\beta = -\beta - \alpha \\ z = -\beta - 2w \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -w - x + \alpha - 4\beta \\ z = -\beta - 2w \end{cases}$$

Wówczas $\begin{bmatrix} \gamma \\ -\delta - \gamma + \alpha - 4\beta \\ -\beta - 2\delta \\ \delta \end{bmatrix}$

Przykład 6 - Wektor dołączony

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -4 & -7 \\ -1 & -1 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma \\ -\delta - \gamma + \alpha - 4\beta \\ -\beta - 2\delta \\ \delta \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x + y - 4z - 7w = \gamma \\ -x - y + 5z + 9w = -\delta - \gamma + \alpha - 4\beta \\ 2z + 4w = -\beta - 2\delta \\ -z - 2w = \delta \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + w + 4\delta = \gamma \\ -x - y - w - 5\delta = -\delta - \gamma + \alpha \\ \beta = 0 \end{cases}$$

Przykład 6 - Wektor dołączony

$$\begin{cases} x + y + w + 4\delta = \gamma \\ -x - y - w - 5\delta = -\delta - \gamma + \alpha \\ \beta = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -w - 4\delta + \gamma - x \\ \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} \varphi \\ -\eta - 4\delta + \gamma - \varphi \\ -2\eta - \delta \\ \eta \end{bmatrix}$$

Przykład 6 - Wektor dołączony

$$\begin{bmatrix} \varphi \\ -\eta - 4\delta + \gamma - \varphi \\ -2\eta - \delta \\ \eta \end{bmatrix}$$

- Widać, że ten już nie zależy od parametrów wektora własnego, tzn. α i β.
- Widać zatem, że klatki stopnia 3 nie ma
- Skoro tak to wnioskujemy, iż będzie po jednej klatce stopnia 3 i 1

Wybieranie wektorów dla macierzy przejścia

- Łańcuch Jordana wygląda tak:

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ -\alpha-\beta \\ -2\beta \\ \beta \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \gamma \\ -\delta-\gamma+\alpha-4\beta \\ -\beta-2\delta \\ \delta \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \varphi \\ -\eta-4\delta+\gamma-\varphi \\ -2\eta-\delta \\ \eta \end{bmatrix}_{\substack{\beta=0\\ \alpha=0}}$$

- Dla $\alpha = 1$ klatki stopnia 2, dla $\beta = 1$ klatka stopnia 2
- Rozkład wygląda tak

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \mathbf{A}$$

Przykład 7 wielomian charakterystyczny

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & -2 \\ -1 & 3 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 3 & -2 \\ -1 & 3-\lambda & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (3 - 4\lambda + \lambda^2 + 1)^2 = (2 - \lambda)^4$$

Przykład 7 wartości własne i wektory własne

- $\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}) \quad \Rightarrow \quad \lambda = 2$ krotność 4
- dla $\lambda = 2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & -2 \\ -1 & 3 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} \qquad (\mathbf{A}-2\cdot\mathbf{I})\mathbf{v} = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -x+y+3z-2w=0 \Rightarrow -x+y+z=0 \\ -x-y+4z-2w=0 \Rightarrow -x+y+2z=0 \\ -z+w=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=x \\ z=0 \\ z=w \end{cases}$$

Przykład 7 - Wektor własny

- Wektor własny jest postaci

$$\begin{cases} y = x \\ z = 0 \\ z = w \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Więc będzie 1 klatka Jordan
- Będzie to klatka stopnia 4
- Przejdźmy do wyliczamy wektorów dołączonych

Przykład 7 - Wektor dołączony

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -x + y + 3z - 2w = \alpha \\ -x + y + 4z - 2w = \alpha \\ -z + w = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y - \alpha \\ z = 0 \\ z = w \end{cases}$$

Wówczas $\begin{bmatrix} \beta - \alpha \\ \beta \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Przykład 7 - Wektor dołączony

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta - \alpha \\ \beta \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -x + y + 3z - 2w = \beta - \alpha \Rightarrow x = y - \alpha \\ -x + y + 4z - 2w = \beta \Rightarrow z = 0 \\ -z + w = 0 \Rightarrow z = w \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x + y + \alpha = \beta - \alpha \\ z = \alpha \\ z = w \end{cases}$$

Przykład 7 - Wektor dołączony

$$\begin{cases} -x + y + \alpha = \beta - \alpha \\ z = \alpha \\ z = w \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x + \beta - 2\alpha \\ z = w = \alpha \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \gamma \\ \gamma + \beta - 2\alpha \\ \alpha \\ \alpha \end{bmatrix}$$

Przykład 7 - Wektor dołączony kolejny

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma \\ \gamma + \beta - 2\alpha \\ \alpha \\ \alpha \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -x + y + 3z - 2w = \gamma \\ -x + y + 4z - 2w = \gamma + \beta - 2\alpha \\ w = \alpha + z \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x + y + z - 2\alpha = \gamma \\ -x + y + 2z - 2\alpha = \gamma + \beta - 2\alpha \\ w = \alpha + z \end{cases}$$

Przykład 7 - Wektor dołączony

$$\begin{cases} -x+y+z-2\alpha=\gamma \\ -x+y+2z-2\alpha=\gamma+\beta-2\alpha \\ w=\alpha+z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=y+z-2\alpha-\gamma \\ x=y+2z-\beta-\gamma \\ w=\alpha+z \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=y+z-2\alpha-\gamma \\ z-2\alpha=2z-\beta \\ w=\alpha+z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=y+z-2\alpha-\gamma \\ z=\beta-2\alpha \\ w=\alpha+z \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=y+\beta-4\alpha-\gamma \\ z=\beta-2\alpha \\ w=\beta-\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} \delta+\beta-4\alpha-\gamma \\ \delta \\ \beta-2\alpha \\ \beta-\alpha \end{bmatrix}$$

Przykład 7 - Wektor dołączony

$$\begin{bmatrix} \delta + \beta - 4\alpha - \gamma \\ \delta \\ \beta - 2\alpha \\ \beta - \alpha \end{bmatrix}$$

- Widać, że taki wektor w dalszym ciągu zależy od parametrów wektora własnego, tzn. α i β.

Wybieranie wektorów dla macierzy przejścia

- Łańcuch Jordana wygląda tak:

$$\begin{bmatrix}\alpha\\\alpha\\0\\0\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}\beta-\alpha\\\beta\\0\\0\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}\gamma\\\gamma+\beta-2\alpha\\\alpha\\\alpha\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}\delta+\beta-4\alpha-\gamma\\\delta\\\beta-2\alpha\\\beta-\alpha\end{bmatrix}$$

- Dla $\alpha = 1$ klatka stopnia 4, Rozkład wygląda tak

$$\begin{bmatrix}1&-1&0&-4\\1&0&-2&0\\0&0&1&-2\\0&0&1&-1\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}2&1&0&0\\0&2&1&0\\0&0&2&1\\0&0&0&2\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}1&-1&0&-4\\1&0&-2&0\\0&0&1&-2\\0&0&1&-1\end{bmatrix}^{-1} = \mathbf{A}$$

Sposób 2 (szybszy)

- Kolejne potęgi macierzy $\mathbf{B} = \mathbf{A} - 2\mathbf{I}$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B}^4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Teraz wybieramy dowolny wektor, taki aby $\mathbf{B}^4\mathbf{u}^4 = \mathbf{0}$, oraz $\mathbf{B}^3\mathbf{u}^4 \neq \mathbf{0}$

Poprzednie wektory dołączone

- Ten wektor to np.

$$\mathbf{u}^4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Wówczas obliczamy kolejne coraz niższego rzędu wektory dołączone, tzn.
- $\mathbf{u}^3 = \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}^4$
- $\mathbf{u}^2 = \mathbf{B}^2 \cdot \mathbf{u}^4$
- $\mathbf{u}^1 = \mathbf{B}^3 \cdot \mathbf{u}^4$

$$\mathbf{u}^3 = \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}^4 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u}^2 = \mathbf{B}^2 \cdot \mathbf{u}^4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u}^1 = \mathbf{B}^3 \cdot \mathbf{u}^4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Skąd wiadomo w takim razie jakie będą klatki Jordana

- $d_1 = 4 - \operatorname{rank} \mathbf{B} = 4 - 3$
- $d_2 = 4 - \operatorname{rank} \left(\mathbf{B}^2\right) = 4 - 2$
- $d_3 = 4 - \operatorname{rank} \left(\mathbf{B}^3\right) = 4 - 1$
- $d_4 = 4 - \operatorname{rank} \left(\mathbf{B}^4\right) = 4 - 0$
- Jak nam wyszło zero to następne wiadomo, że będzie 4
- Klatek będzie $d_1 = 1$
- Klatek stopnia większego od 1 będzie $d_2 - d_1 = 1$
- Klatek stopnia większego od 2 będzie $d_3 - d_2 = 1$
- Klatek stopnia większego od 3 będzie $d_4 - d_3 = 1$
- Klatek stopnia większego od 4 będzie $d_5 - d_4 = 0$

Rozkład Jordana

- U kładamy wektory w odpowiedniej kolejności

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \mathbf{A}$$

- Czy ten wybór wpasowuję we wcześniej wyznaczony model pierwszą metodą? Łańcuch Jordana wygląda tak:

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \beta - \alpha \\ \beta \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \gamma \\ \gamma + \beta - 2\alpha \\ \alpha \\ \alpha \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \delta + \beta - 4\alpha - \gamma \\ \delta \\ \beta - 2\alpha \\ \beta - \alpha \end{bmatrix}$$

Przykład 8 wielomian charakterystyczny

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -6 & -7 & -9 \\ 1 & 5 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \begin{vmatrix} -\lambda & -6 & -7 & -9 \\ 1 & 5-\lambda & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 4-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (-5\lambda + \lambda^2 + 6)(4 - 5\lambda + \lambda^2 + 2) = (\lambda - 2)^2(\lambda - 3)^2$$

Przykład 8 wartości własne i wektory własne

- $\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}) \quad \Rightarrow \quad \lambda = 2$ krotność 2 i $\lambda = 3$ krotność 2
- dla $\lambda = 2$

$$\begin{bmatrix} 0 & -6 & -7 & -9 \\ 1 & 5 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad (\mathbf{A}-2\cdot\mathbf{I})\mathbf{v} = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} -2 & -6 & -7 & -9 \\ 1 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -2x-6y-7z-9w=0 \Rightarrow -2x-6y-2w=0 \\ x+3y+3z+4w=0 \Rightarrow x+3y+w=0 \\ 2z+2w=0 \Rightarrow z=-w \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-3y-w \\ z=-w \end{cases}$$

Przykład 8 - Wektor własny

- Wektor własny jest postaci

$$\begin{cases} x = -3y - w \\ z = -w \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} -3\alpha - \beta \\ \alpha \\ -\beta \\ \beta \end{bmatrix}$$

- Będą 2 klatki stopnia 1

Przykład 8 wartości własne i wektory własne

- $\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}) \quad \Rightarrow \quad \lambda = 2$ krotność 2 i $\lambda = 3$ krotność 2
- dla $\lambda = 3$

$$\begin{bmatrix} 0 & -6 & -7 & -9 \\ 1 & 5 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad (\mathbf{A}-3\cdot\mathbf{I})\mathbf{v} = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} -3 & -6 & -7 & -9 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -3x-6y-7z-9w = 0 \Rightarrow -3x-6y+5w = 0 \\ x+2y+3z+4w = 0 \Rightarrow x+2y-2w = 0 \\ z+2w = 0 \Rightarrow z = -2w \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -6w+5w = 0 \\ x = -2y \\ z = -2w \end{cases}$$

Przykład 8 - Wektor własny

- Wektor własny jest postaci

$$\begin{cases} w = 0 = z \Rightarrow w = 0 \\ x = -2y \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} -2\alpha \\ \alpha \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Będą 1 klatki stopnia 2

Przykład 8 - Wektor dołączony

$$\begin{bmatrix} -3 & -6 & -7 & -9 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\alpha \\ \alpha \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -3x - 6y - 7z - 9w = -2\alpha \\ x + 2y + 3z + 4w = \alpha \\ z + 2w = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3x - 6y + 5w = -2\alpha \\ x + 2y - 2w = \alpha \\ z = -2w \end{cases}$$

$$\begin{cases} -w = \alpha \\ x = -\alpha - 2y \end{cases} \quad \text{Wówczas} \begin{bmatrix} -\alpha - 2\beta \\ \beta \\ 2\alpha \\ -\alpha \end{bmatrix}$$

Przykład 8 - Wektor dołączony

$$\begin{bmatrix} -3 & -6 & -7 & -9 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta - \alpha \\ \beta \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -x + y + 3z - 2w = \beta - \alpha \Rightarrow x = y - \alpha \\ -x + y + 4z - 2w = \beta \Rightarrow z = 0 \\ -z + w = 0 \Rightarrow z = w \end{cases}$$

Wybieranie wektorów dla macierzy przejścia

- Łańcuchy Jordana wyglądają tak:

$$\begin{bmatrix} -3\alpha-\beta \\ \alpha \\ -\beta \\ \beta \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} -2\alpha \\ \alpha \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -\alpha-2\beta \\ \beta \\ 2\alpha \\ -\alpha \end{bmatrix}$$

- dla $\lambda = 2$, to $\alpha = 1$, potem $\beta = 1$
- dla $\lambda = 3$, to $\alpha = 1$

$$\begin{bmatrix} -3 & -1 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -3 & -1 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = \mathbf{A}$$

Przykład 9

- To może stopnia 6

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Przykład 9 - wielomian charakterystyczny

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1-\lambda & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (1-\lambda)^2 \cdot \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1-\lambda & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} =$$

Przykład 9 - wielomian charakterystyczny

$$= (1-\lambda)^2 \cdot \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1-\lambda & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^3 \cdot \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & -1 \\ -1 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (1-\lambda)^4 \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^6$$

$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0 \Rightarrow \lambda = 1$ krotność algebraiczna 6

Przykład 9 - wektory własne

- $\lambda = 1$ Zagadnienie własne to $(\mathbf{A} - 1 \cdot \mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \\ t \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -y - t + s = 0 \quad \Rightarrow \ s = 0 \\ -x - y + w - t + s = 0 \quad \Rightarrow \ w = x \\ y + t = 0 \quad \Rightarrow \ y = -t \end{cases}$$

Przykład 9 - wektory własne

$$\begin{cases} s = 0 \\ w = x \\ y = -t \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} \alpha \\ -\beta \\ \gamma \\ \alpha \\ \beta \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ gdzie } \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 > 0$$

- Możemy wybrać do 3 wektorów własnych liniowo niezależnych $\dim\ker(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 3$
- Będą zatem 3 klatki Jordana. Możliwe konfiguracje $(4, 1, 1), (3, 2, 1), (2, 2, 2)$, która dokładnie okaże się w trakcie.

Wektor dołączony (2)

- Tak czy siak będzie potrzebny wektor dołączony

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \\ t \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ -\beta \\ \gamma \\ \alpha \\ \beta \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 0 = \alpha \\ -y - t + s = -\beta \quad \Rightarrow \; s = 0 \\ -x - y + w - t + s = \gamma \quad \Rightarrow \; w = \gamma + \beta + x \\ y + t = \beta \quad \Rightarrow \; y = -t + \beta \end{cases}$$

Wektory dołączone (2)

$$\begin{cases} 0 = \alpha \\ s = 0 \\ w = \gamma + \beta + x \\ y = -t + \beta \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{bmatrix} \delta \\ -\varphi + \beta \\ \epsilon \\ \gamma + \beta + \delta \\ \varphi \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ gdzie } 0^2 + \beta^2 + \gamma^2 > 0$$

Wektor dołączony (3)

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \\ t \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta \\ -\varphi + \beta \\ \epsilon \\ \gamma + \beta + \delta \\ \varphi \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 0 = \delta \\ -y - t + s = -\varphi + \beta \quad \Rightarrow \quad s = \beta \\ -x - y + w - t + s = \epsilon \quad \Rightarrow \quad w = \epsilon + \varphi - \beta + x \\ 0 = \gamma + \beta + \delta \quad \Rightarrow \gamma = -\beta \\ y + t = \varphi \quad \Rightarrow \quad y = -t + \varphi \end{cases}$$

Wektory dołączone (3)

$$\begin{cases} 0 = \delta \\ s = \beta \\ w = \epsilon + \varphi - \beta + x \\ \gamma = -\beta \\ y = -t + \varphi \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{bmatrix} \eta \\ -\kappa + \varphi \\ \theta \\ \epsilon + \varphi - \beta + \eta \\ \kappa \\ \beta \end{bmatrix}, \ \text{gdzie } 0^2 + 2\beta^2 + > 0$$

Wektory dołączone (4)?

$$\begin{cases} s = \varphi \\ w = \theta + \kappa - \varphi + x \\ y = -t + \kappa \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{bmatrix} \psi \\ -\pi + \kappa \\ \Omega \\ \theta + \kappa - \varphi + \psi \\ \pi \\ \varphi \end{bmatrix}, \text{ gdzie } \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 > 0$$

- Tu już nie ma, ani α, ani β, ani γ, które były w wektorze własnym.

Podsumowanie

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ -\beta \\ \gamma \\ \alpha \\ \beta \\ 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \delta \\ -\varphi+\beta \\ \epsilon \\ \gamma+\beta+\delta \\ \varphi \\ 0 \end{bmatrix}_{\alpha=0} \to \begin{bmatrix} \eta \\ -\kappa+\varphi \\ \theta \\ \epsilon+\varphi-\beta+\eta \\ \kappa \\ \beta \end{bmatrix}_{\substack{\alpha=0 \\ \delta=0 \\ \gamma=-\beta}} \to \begin{bmatrix} \psi \\ -\pi+\kappa \\ \Omega \\ \theta+\kappa-\varphi+\psi \\ \pi \\ \varphi \end{bmatrix}$$

- Pierwszy zależy od α, β, γ
- Drugi zależy od β, γ oraz $\alpha = 0$
- Trzeci zależy od β oraz $\delta = 0 \wedge \gamma = -\beta$
- Mamy klatkę stopnia 1, stopnia 2 i stopnia 3

Wybór wektorów do macierzy przejścia

- Wektor dla klatki stopnia 1 to np.

$$\begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = \gamma = \delta = \varphi = \epsilon = \eta = \kappa = \theta = \psi = \pi = \Omega = 0 \end{cases}$$

- Wektory dla klatki stopnia 3 to np.

$$\begin{cases} \beta = 1 \\ \gamma = -1 \\ \alpha = \delta = \varphi = \epsilon = \eta = \kappa = \theta = \psi = \pi = \Omega = 0 \end{cases}$$

- Wektory dla klatki stopnia 2 to np.

$$\begin{cases} \gamma = 1 \\ \alpha = \beta = \delta = \varphi = \epsilon = \eta = \kappa = \theta = \psi = \pi = \Omega = 0 \end{cases}$$

Macierz przejścia - zmiany bazy

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{A}$$

Sposób 2 (szybszy)

- Kolejne potęgi macierzy $\mathbf{B} = \mathbf{A} - 1 \cdot \mathbf{I}$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- $\mathbf{B}^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ Teraz wybieramy dowolny wektor, taki aby $\mathbf{B}^3\mathbf{u}^3 = \mathbf{0}$ oraz $\mathbf{B}^2\mathbf{u}^3 \neq \mathbf{0}$ np. $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Poprzednie wektory dołączone

- Ten wektor to np.

$$\mathbf{u}^3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Wówczas obliczamy kolejne coraz niższego rzędu wektory dołączone, tzn.
- $\mathbf{u}^2 = \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}^3$
- $\mathbf{u}^1 = \mathbf{B}^2 \cdot \mathbf{u}^3$

$$\mathbf{u}^2 = \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u}^1 = \mathbf{B}^2 \cdot \mathbf{u}^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Skąd wiadomo w takim razie jakie będą klatki Jordana

- $d_1 = 6 - \operatorname{rank} \mathbf{B} = 6 - 3 = 3$
- $d_2 = 6 - \operatorname{rank} \left(\mathbf{B}^2\right) = 6 - 1 = 5$
- $d_3 = 6 - \operatorname{rank} \left(\mathbf{B}^3\right) = 6 - 0 = 6$
- Jak nam wyszło 6 to następne wiadomo, że będzie 6
- Klatek będzie $d_1 = 3$
- Klatek stopnia większego od 1 będzie $d_2 - d_1 = 2$
- Klatek stopnia większego od 2 będzie $d_3 - d_2 = 1$
- Klatek stopnia większego od 3 będzie $d_4 - d_3 = 0$

Mamy wektory tylko dla klatki stopnia 3

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Teraz wybieramy wektor dołączony rzędu 2 dla klatki stopnia 2, ale niezależny liniowo już z tymi co zostały użyte w znalezionej klatce.
- Może być to np. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$

Dla klatki stopnia 2

$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$

- Oczywiście nie jest on także wektorem własnym, ale jest, taki że $\mathbf{B}^2 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T = \mathbf{0}$
- Wektor własny dla tego wektora to

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Teraz mamy już wektory dla dwóch klatek

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Pozostało wybrać wektor własny dla trzeciej klatki Jordana stopnia 1, który będzie niezależny liniowo z już wybranymi.
- Może to być np. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{A}$$

Oczywiście wpasowuje się to w nasz wcześniej wyznaczony model tzn.

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ -\beta \\ \gamma \\ \alpha \\ \beta \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \delta \\ -\varphi + \beta \\ \epsilon \\ \gamma + \beta + \delta \\ \varphi \\ 0 \end{bmatrix}_{\alpha = 0} \rightarrow \begin{bmatrix} \eta \\ -\kappa + \varphi \\ \theta \\ \epsilon + \varphi - \beta + \eta \\ \kappa \\ \beta \end{bmatrix}_{\substack{\alpha = 0 \\ \delta = 0 \\ \gamma = -\beta}} \rightarrow \begin{bmatrix} \psi \\ -\pi + \kappa \\ \Omega \\ \theta + \kappa - \varphi + \psi \\ \pi \\ \varphi \end{bmatrix}$$

- klatka st. 1 to $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$
- klatka st. 3 to $\beta = 1$, $\gamma = -1$, $\epsilon = 1$, reszta to 0
- klatka st. 2 to $\gamma = 1$ reszta to 0

Przykład 10 wielomian charakterystyczny

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 3 & -\sqrt{3}i \end{vmatrix} =$$

$$= (2-\lambda)^2 + 3 = 4 - 4\lambda + \lambda^2 + 3 = \lambda^2 - 4\lambda + 7$$

Przykład 10 wartości własne i wektory własne

- $\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}) \ \Rightarrow \ \lambda^2-4\lambda+7=0 \Rightarrow \lambda = 2+\sqrt{3}i \vee \lambda = 2-\sqrt{3}i$
- dla $\lambda = 2+\sqrt{3}i$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \qquad (\mathbf{A}-(2+\sqrt{3}i)\cdot\mathbf{I})\mathbf{v} = 0 \ \Rightarrow \begin{bmatrix} -\sqrt{3}i & -1 \\ 3 & -\sqrt{3}i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -\sqrt{3}ix - y = 0 \\ 3x - \sqrt{3}iy = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{3}iy$$

Przykład 10 - Wektor własny

- Wektor własny jest postaci

$$x = \frac{\sqrt{3}}{3} iy \qquad \Rightarrow \qquad \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} i\alpha \\ \alpha \end{bmatrix}$$

- Będzie 1 klatka stopnia 1

Przykład 10 wartości własne i wektory własne

- $\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}) \;\Rightarrow\; \lambda^2-4\lambda+7=0 \Rightarrow \lambda = 2+\sqrt{3}i \vee \lambda = 2-\sqrt{3}i$
- dla $\lambda = 2-\sqrt{3}i$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \qquad (\mathbf{A}-(2-\sqrt{3}i)\cdot\mathbf{I})\mathbf{v} = 0 \;\Rightarrow\; \begin{bmatrix} \sqrt{3}i & -1 \\ 3 & \sqrt{3}i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \sqrt{3}ix - y = 0 \\ 3x + \sqrt{3}iy = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow x = -\frac{\sqrt{3}}{3}iy$$

Przykład 10 - Wektor własny

- Wektor własny jest postaci

$$x = -\frac{\sqrt{3}}{3}iy \qquad \Rightarrow \qquad \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{3}i\alpha \\ \alpha \end{bmatrix}$$

- Będą 1 klatki stopnia 1

Rozkład macierz w postaci Jordana

- Wektory własne to

$$\begin{bmatrix} +\frac{\sqrt{3}}{3} i\alpha \\ \alpha \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{3} i\alpha \\ \alpha \end{bmatrix}$$

- Powstały rozkład dla $\alpha = 1$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} i & -\frac{\sqrt{3}}{3} i \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 + \sqrt{3} i & 0 \\ 0 & 2 - \sqrt{3} i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} i & -\frac{\sqrt{3}}{3} i \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

Rozkład macierz w postaci Jordana baza rzeczywistych

- Wektory własne to

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} i\alpha \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} +\frac{\sqrt{3}}{3}\alpha \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{3} i\alpha \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{3}\alpha \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Można też tak jak ktoś nie che mieć liczb zespolonych w rozkładzie

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1}$$

Przykład 11 wielomian charakterystyczny

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ -3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 0 & 3 \\ -3 & 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (2-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 3 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ -3 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 1 & 2-\lambda & 3 \\ -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (2-\lambda)^4 + 9(2-\lambda)^2 + 81 + 9(2-\lambda)^2 =$$

$$= (2-\lambda)^2\left((2-\lambda)^2+9\right) + 9\left((2-\lambda)^2+9\right) = \left((2-\lambda)^2+9\right)^2$$

Przykład 11 wartości własne i wektory własne

- $\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})=0 \quad\Rightarrow\quad \lambda=2+3i$ krotność algebraiczna 2 oraz $\lambda=2-3i$ też z krotnością algebraiczną 2
- dla $\lambda=2+3i$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ -3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad (\mathbf{A}-(2+3i)\cdot\mathbf{I})\mathbf{v}=0 \;\Rightarrow\; \begin{bmatrix} -3i & 0 & 3 & 0 \\ 1 & -3i & 0 & 3 \\ -3 & 0 & -3i & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -3i \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -3ix+3z=0 \\ x-3iy+3w=0 \\ -3x-3iz=0 \\ -3y+z-3iw=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=ix \\ x=3iy-3w \\ ix-3y-3iw=0 \end{cases}$$

Przykład 11 - Wektor własny

- Wektor własny jest postaci

$$\begin{cases} z = ix \\ x = 3iy - 3w \\ ix - 3y - 3iw = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = ix \\ x = 3iy - 3w \\ -3y - 3iw - 3y - 3iw = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = ix \\ x = 0 \\ w = yi \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha \\ 0 \\ \alpha i \end{bmatrix}$$

- Będzie 1 klatka stopnia 2

Przykład 11 - Wektor dołączony

$$\begin{bmatrix} -3i & 0 & 3 & 0 \\ 1 & -3i & 0 & 3 \\ -3 & 0 & -3i & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -3i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha \\ 0 \\ \alpha i \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -3ix + 3z = 0 \\ x - 3iy + 3w = \alpha \\ -3x - 3iz = 0 \\ -3y + z - 3iw = \alpha i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = ix \\ x = 3iy - 3w + \alpha \\ -3y + ix - 3iw = \alpha i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = ix \\ w = yi \\ x = \alpha \end{cases}$$

Przykład 11 - Wektor własny

- Wektor własny jest postaci

$$\begin{cases} z = ix \\ w = yi \\ x = \alpha \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \alpha i \\ \beta i \end{bmatrix}$$

- Będzie 1 klatka stopnia 2

Rozkład macierz w postaci Jordana

- Łańcuchy Jordana to:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \alpha \\ 0 \\ \alpha i \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \alpha i \\ \beta i \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha \\ 0 \\ -\alpha i \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ -\alpha i \\ -\beta i \end{bmatrix}$$

- Powstały rozkład dla $\alpha = 1$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & i & 0 & -i \\ i & 0 & -i & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2+3i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2+3i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2-3i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2-3i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & i & 0 & -i \\ i & 0 & -i & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \mathbf{A}$$

Rozkład macierz w postaci Jordana baza rzeczywistych

- Łańcuch Jordana

$$\begin{bmatrix}0\\\alpha\\0\\\alpha i\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\\alpha\\0\\0\end{bmatrix} + {\color{red}i}\begin{bmatrix}0\\0\\0\\\alpha\end{bmatrix} \qquad \rightarrow \qquad \begin{bmatrix}\alpha\\\beta\\\alpha i\\\beta i\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\alpha\\\beta\\0\\0\end{bmatrix} + {\color{red}i}\begin{bmatrix}0\\0\\\alpha\\\beta\end{bmatrix}$$

- Można też tak jak ktoś nie che mieć liczb zespolonych w rozkładzie

$$\begin{bmatrix}0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}2&3&{\color{red}1}&0\\-3&2&0&{\color{red}1}\\0&0&2&3\\0&0&-3&2\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\end{bmatrix}^{-1} = \mathbf{A}$$

Rozkład Jordana

- Na pierwszy rzut oka wygląda bardzo podobnie

$$\mathbf{A} = \mathbf{W}\mathbf{J}\mathbf{W}^{-1},$$

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_1 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_2 & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{K}_q \end{bmatrix} \qquad \mathbf{K}_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_i & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_i \end{bmatrix},$$

  gdzie $i \in \{1, 2, \ldots q\}$,
- Jednak teraz Macierz $\mathbf{J}$ nie jest diagonalna.
- Macierz $\mathbf{K}_i$ są nazywane klatkami i są różnych stopni.

NAJWAŻNIEJSZE

- Każdą macierz $\mathbf{A}$ można zapisać w postaci Jordana.
$$\mathbf{A} = \mathbf{W} \cdot \mathbf{J} \cdot \mathbf{W}^{-1}$$
- Macierz Jordana $\mathbf{J}$ jest wyznacza jednoznacznie z dokładnością do ewentualnego przestawiania kolejności klatek Jordana.
- Nie ma zatem możliwości, aby dla tej samej macierzy $\mathbf{A}$ istniały dwie różne macierze Jordana $\mathbf{J}$, które będą miały inną liczbę i rodzaj klatek. Mówiąc to stwierdzenie wykluczam tu używanie rzeczywistych klatek dla zespolonych wartości własnych
- Natomiast macierz przejścia $\mathbf{W}$ jest wyznaczana niejednoznacznie, jest ich nieskończenie wiele do wyboru. To że jest nieskończenie wiele dobrych nie znaczy, że totalnie byle jaka macierz będzie ok.

NAJWAŻNIEJSZE

- Macierz **W** różnie jest nazywana: macierz zmiany bazy, macierz modalna, macierz podobieństwa, macierz ustalająca podobieństwo
- Macierz **W** składa się z wektorów własnych liniowo niezależnych i wówczas rozkład Jordana sprowadza się do diagonalizacji macierzy.
- Natomiast jeżeli liczba wektorów własnych liniowo niezależnych jest mniejsza od n stopień macierz **A** to wówczas trzeba **umiejętnie** wyszukać wektory dołączone.
- Następnie te wektory trzeba **umiejętnie** dołożyć do wektorów własnych aby zbudować macierz **W**

Procedura

- Dana jest dowolna macierz $\mathbf{A}$ o stopniu n
- $w(\lambda)$ wielomian charakterystyczny macierzy $\mathbf{A}$ powstały z

$$\det\left(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}\right) \qquad \Rightarrow \qquad w(\lambda)$$

- Rozwiązanie równania charakterystycznego $w(\lambda) = 0$ są wartości własne
- λ_i - wartość własna, dla $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$
- przy czym mamy $\lambda_i \neq \lambda_j$, gdy $i, j \in \{1, 2, \ldots, r\} \wedge i \neq j$
- r liczba różnych wartości własnych
- k_i - krotność algebraiczna i-tej wartości własnej λ_i
- zawsze jest spełnione

$$k_1 + k_2 + k_3 + \ldots + k_r = n$$

Procedura

- Dla każdej z kolejnych wartości własnych λ_i, gdzie $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$ przeprowadzamy szereg czynności
  - Wyznaczamy przestrzeń własną
    $$\ker\left(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I}\right)$$
  - Wymiar przestrzeni własnej.
    $$\dim\left(\ker\left(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I}\right)\right) \quad = \quad d_1 \quad = \quad n - \operatorname{rank}(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})$$
  - Jeżeli $d_1 = k_i$, to wybieramy dowolne k_i wektorów niezależnych liniowo
  - Natomiast jeżeli $d_1 < k_i$, to

Procedura $d_1 < k_i$

- Jeżeli $d_1 < k_i$, to wyznaczamy dodatkowo $k_i - d_i$ wektorów dołączonych, do d_1 wektorów własnych.
  - d_1 mówi o liczbie klatek
  - Każdej klatce odpowiada dokładnie jeden wektor własny
  - Suma stopni tych klatek jest równa krotności algebraicznej wartości własnej λ_i

$$s_1 + s_2 + \ldots + s_{d_1} = k_i$$

  - Dla łatwiejszego opisu dalszej teorii przyjmijmy, że są w kolejności nierosnącej

$$m = s_1 \geqslant s_2 \geqslant \ldots \geqslant s_{d_1}$$

  - Identyfikujemy stopnie klatek Jordana

Algorytmiczne wyznaczanie liczby i rodzaju klatek

- Obliczamy wymiar jądra kolejnych potęg $(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})$
  - $d_1 = \dim\ker\left((\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})\right)$
  - $d_2 = \dim\ker\left((\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})^2\right)$
  - $d_3 = \dim\ker\left((\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})^3\right)$
  - $\vdots$
- Każdą z tych liczb można równoważnie policzyć
  - $d_1 = n - \operatorname{rank}(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})$
  - $d_2 = n - \operatorname{rank}\left((\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})^2\right)$
  - $d_3 = n - \operatorname{rank}\left((\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})^3\right)$
  - $\vdots$
- Wynika to z twierdzenia Sylvestra

$$\dim\ker(\mathbf{B}) + \dim\operatorname{Im}(\mathbf{B}) = \dim V$$

Algorytmiczne wyznaczanie liczby i rodzaju klatek

- Wówczas
  - d_1 to liczba klatek stopnia większego od 1
  - $d_2 - d_1$ to liczba klatek stopnia większego od 2
  - $d_3 - d_2$ to liczba klatek stopnia większego od 3
  - $\vdots$
- Pojawia się pytanie do jakiego indeksu m wyznaczmy to d_m?
  - $d_{m-1} - d_{m-2} \neq 0$ robimy dalej
  - $d_m - d_{m-1} = 0$ tu kończmy.
  - Stopień największej klatki to $m = s_1$
  - Przy czym wcale **nie** jest powiedziane, że $d_{m-1} = d_m = d_{m+1} = \ldots = 0$
  - Może być np. $d_{m-1} = d_m = d_{m+1} = \ldots = 2$

Fragment macierz Jordana

- Teraz znamy stopnie $s_1, s_2, \ldots, s_{d_1}$ wszystkich klatek Jordana dla wartości własnej λ_i,
- Znamy zatem fragment macierzy $\mathbf{J}$, związany z wartością własną λ_i oznaczmy ją przez $\mathbf{J}_i$

$$
\mathbf{J} = \begin{bmatrix}
\ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
\ldots & \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_i & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_i \end{bmatrix} & & & & \ldots \\
\ldots & & \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_i & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_i \end{bmatrix} & & & \ldots \\
\ldots & & & \ddots & & \ldots \\
\ldots & & & & \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_i & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_i \end{bmatrix} & \ldots \\
 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{bmatrix}
$$

i-ty fragment macierzy przejścia $\mathbf{W}$

- Wyznaczamy blok wektorów, dla klatki stopnia s_1, czyli macierz $\mathbf{W}_{i,1}$ o wymiarach $[n \times s_1]$,
- Następnie w podobny sposób dla kolejnej klatki stopnia s_2, czyli niewiększego, czyli $\mathbf{W}_{i,2}$ o wymiarach $[n \times s_2]$ itd.
- Aż do ostatniego bloku $\mathbf{W}_{i,d_i}$ o wymiarach $[n \times s_{d_1}]$
- W ten sposób mamy fragment macierzy przejścia o wymiarach $[n \times k_i]$. Wszystkich fragmentów jest r

$$\mathbf{W}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{W}_{i,1} & \mathbf{W}_{i,2} & \dots & \mathbf{W}_{i,d_1} \end{bmatrix}$$

Wyliczanie wektorów dołączonych dla $\mathbf{W}_i$

- Z ogólnego wektora własnego $\mathbf{v}_i$ wyznaczamy wektor dołączony 2 rzędu
- Następnie powtarzamy tyle razy, aby uzyskać wektor dołączony rzędu takiego jaki jest stopień największej klatki, czyli m.

$$
\begin{array}{lcc}
1) & (\mathbf{A}-\lambda_i\mathbf{I})\,\mathbf{v}_i = \mathbf{0} & (\mathbf{A}-\lambda_i\mathbf{I})\,\mathbf{v}_i = \mathbf{0} \\
2) & (\mathbf{A}-\lambda_i\mathbf{I})\,\mathbf{u}_i^2 = \mathbf{v}_i & (\mathbf{A}-\lambda_i\mathbf{I})^2\,\mathbf{u}_i^2 = \mathbf{0} \\
3) & (\mathbf{A}-\lambda_i\mathbf{I})\,\mathbf{u}_i^3 = \mathbf{u}_i^2 & (\mathbf{A}-\lambda_i\mathbf{I})^3\,\mathbf{u}_i^3 = \mathbf{0} \\
4) & (\mathbf{A}-\lambda_i\mathbf{I})\,\mathbf{u}_i^4 = \mathbf{u}_i^3 & (\mathbf{A}-\lambda_i\mathbf{I})^4\,\mathbf{u}_i^4 = \mathbf{0} \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
m) & (\mathbf{A}-\lambda_i\mathbf{I})\,\mathbf{u}_i^m = \mathbf{u}_i^{m-1} & (\mathbf{A}-\lambda_i\mathbf{I})^m\,\mathbf{u}_i^m = \mathbf{0}
\end{array}
$$

Pamiętaj jednak, że

- Proszę jednak pamiętaj, że nie dla dowolnego wektora własnego istnieją wektory dołączone.
- Musimy nie jako wyznaczać te wektory uogólnione od najwyższego rzędu i potem schodzić niżej, tak jak miało to miejsce w naszych przykładach

$$(\mathbf{A}-\lambda_i\mathbf{I})^1, (\mathbf{A}-\lambda_i\mathbf{I})^2, (\mathbf{A}-\lambda_i\mathbf{I})^3, \ldots, (\mathbf{A}-\lambda_i\mathbf{I})^m$$

- Te potęgi już policzyliśmy przy obliczaniu $d_1, d_2, \ldots, d_m$, bo przypomnijmy, że
  - $d_1 = n - \operatorname{rank}(\mathbf{A}-\lambda_i\mathbf{I})$
  - $d_2 = n - \operatorname{rank}\left((\mathbf{A}-\lambda_i\mathbf{I})^2\right)$
  - $\vdots$
- Wyznaczamy blok wektorów dołączonych dla klatek stopnia m.

Znajdowanie wektorów dołączonych

- Zaczynając od wektora dołączonego $\mathbf{u}_i^m$ łatwo go znajdziemy, bo jest dowolnym wektor z jądra $(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})^m$
- Potem przemnażając przez $(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I}) \cdot \mathbf{u}_i^m = \mathbf{u}_i^{m-1}$
- Powtarzając uzyskamy ciąg aż do wektora własnego.
- Następnie te pojawiające się kolejne wektory układamy w odwrotnej kolejności blok, czyli w macierz o wymiarach $[n \times m]$

$$\begin{bmatrix} v_i & \mathbf{u}_i^2 & \mathbf{u}_i^3 & \dots & \mathbf{u}_i^m \end{bmatrix}$$

Blok wektorów dla macierzy przejścia

- Wyznaczyliśmy blok wektorów, dla macierz o wymiarach $[n \times m]$, dla klatki stopnia $m = s_1$.

$$\mathbf{W}_{i,1} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{i,1} & \mathbf{u}_{i,1}^2 & \mathbf{u}_{i,1}^3 & \dots & \mathbf{u}_{i,1}^m \end{bmatrix}$$

- Następnie w podobny sposób bloki wektorów dla kolejnej klatki stopnia $s_2, s)3, \dots, s_{d_1}$,

$$\mathbf{W}_{i,2} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{i,2} & \mathbf{u}_{i,2}^2 & \mathbf{u}_{i,2}^3 & \dots & \mathbf{u}_{i,2}^{s_2} \end{bmatrix}$$

- itd.

$$\mathbf{W}_{i,d_1} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{i,d_1} & \mathbf{u}_{i,d_1}^2 & \mathbf{u}_{i,d_1}^3 & \dots & \mathbf{u}_{i,d_1}^{s_3} \end{bmatrix}$$

... Ale UWAGA

$$\mathbf{W}_{i,1} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{i,1} & \mathbf{u}_{i,1}^{2} & \mathbf{u}_{i,1}^{3} & \dots & \mathbf{u}_{i,1}^{m} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{W}_{i,2} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{i,2} & \mathbf{u}_{i,2}^{2} & \mathbf{u}_{i,2}^{3} & \dots & \mathbf{u}_{i,2}^{s_2} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{W}_{i,d_1} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{i,d_1} & \mathbf{u}_{i,d_1}^{2} & \mathbf{u}_{i,d_1}^{3} & \dots & \mathbf{u}_{i,d_1}^{s_{d_1}} \end{bmatrix}$$

- Załóżmy, że masz już $\mathbf{W}_{i,1}$. To teraz musisz uważać przy wyborze $\mathbf{u}_{i,2}^{s_2}$ gdyż musi być nie zależny liniowo z $\mathbf{u}_{i,1}^{s_2}$.
- Dopiero wówczas możesz wyznaczać kolejne, tzn. $\mathbf{u}_{i,2}^{s_2-1}$, następnie $\mathbf{u}_{i,2}^{s_2-2}$ itd. aż do $\mathbf{v}_{i,2}$, w efekcie masz $\mathbf{W}_{i,2}$
- Podobnie przy wyborze $\mathbf{u}_{i,3}^{s_3}$ musisz uważać aby nie był liniowo zależny z $\mathbf{u}_{i,2}^{s_3}$ oraz z $\mathbf{u}_{i,1}^{s_3}$

Wszystkie wektory dla λ_i

- Po uzyskaniu wszystkich macierzy składamy ją w większą, tak jak było wspomniane wcześniej

$$\mathbf{W}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{W}_{i,1} & \mathbf{W}_{i,2} & \dots & \mathbf{W}_{i,d_1} \end{bmatrix}$$

- Jest to blok wszystkich wektorów dla wszystkich wektorów własnych dla λ_i
- Potem całą procedurę wykonujemy dla kolejnej wartości własnej λ_{i+1}

Gdy przeszliśmy już po wszystkich indeksach i

- Jak zrobimy dla wszystkich to składamy wszystko w całość

$$\mathbf{A} = \mathbf{W}\mathbf{J}\mathbf{W}^{-1},$$

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{J}_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{J}_r \end{bmatrix} \quad \mathbf{W} = \begin{bmatrix} \mathbf{W}_1 & \mathbf{W}_2 & \dots & \mathbf{W}_r \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_1 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_2 & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{K}_q \end{bmatrix} \qquad \mathbf{K}_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_i & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_i \end{bmatrix},$$

Twierdzenie

Wektory własne odpowiadające różnym wartościom własnym tego samego przekształcenia są liniowo niezależne.

Definicja Wektor dołączony

Definicja

- Wektor $\mathbf{u}^p$ nazywamy wektorem dołączonym rzędu p macierz $\mathbf{A}$ dla wartości własnej λ Jeśli

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})^p \mathbf{u}^p = 0 \qquad \wedge \qquad (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})^{p-1} \mathbf{u}^p \neq 0$$

Macierz diagonalizowalna - pełna odpowiedź

Warunek K-W diagonalizowalności

Jeżeli $\lambda_1, \ldots \lambda_r$ są różnymi wartościami własnymi. Ponadto krotność algebraiczna każdej λ_i jest równa jej krotności geometrycznej, czyli

$$k_i = \dim \ker(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I}),$$

to wtedy i tylko wtedy macierz jest diagonalizowalna.

Uwaga inne konwencje

- Niektórzy klatki Jordana definiują jako macierz, która na przekątnej ma wartość własną, a jedynki pod przekątną, a nie jak do tej pory nad przekątną.
- Jest równoważny zapis, lecz rzadziej spotykany.
- Należy wówczas pamiętać, iż wektory dołączone układamy w odwrotnej kolejności, niż tak jak robiliśmy przez cały ten film w kolumnach, macierzy przejścia, dla danej klatki Jordana.

Łatwe potęgowanie

- Obserwacja

$$\mathbf{A}^3 = \left(\mathbf{WJW}^1\right)^3 = \left(\mathbf{WJW}^1\right)\cdot\left(\mathbf{WJW}^1\right)\cdot\left(\mathbf{WJW}^1\right) =$$

$$= \mathbf{WJ}\underbrace{\mathbf{W}^1\mathbf{W}}_{\mathbf{I}}\mathbf{J}\underbrace{\mathbf{W}^1\mathbf{W}}_{\mathbf{I}}\mathbf{JW}^1 = \mathbf{WJ}^3\mathbf{W}^{-1}$$

- Wniosek

$$\mathbf{A}^n = \left(\mathbf{WJW}^1\right)^n = \mathbf{WJ}^n\mathbf{W}^{-1}$$

- Może jest jeszcze łatwy sposób na obliczanie potęg macierzy $\mathbf{J}$?

Twierdzenie potęgowanie macierzy Jordana

- Okazuje się, że zachodzi:

$$\mathbf{J}^{n} = \left(\begin{bmatrix} \mathbf{K}_1 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_2 & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{K}_q \end{bmatrix} \right)^{n} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_1^{n} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_2^{n} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{K}_q^{n} \end{bmatrix}$$

- Zastanówmy się zatem czym jest potęga klatki Jordana

Potęgowanie klatek Jordana

- Potęgując klatki Jordana stopnia 2, szybko zaobserwujemy powtarzający się wzorzec

$$\begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} a^2 & 2a \\ 0 & a^2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix}^3 = \begin{bmatrix} a^3 & 3a \\ 0 & a^3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix}^4 = \begin{bmatrix} a^4 & 4a \\ 0 & a^4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} a^n & 4n \\ 0 & a^n \end{bmatrix}$$

Potęgowanie klatek Jordana

- Klatka stopnia 3

$$\begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} a^2 & 2a & 1 \\ 0 & a^2 & 2a \\ 0 & 0 & a^2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}^3 = \begin{bmatrix} a^3 & 3a & 3a \\ 0 & a^3 & 3a \\ 0 & 0 & a^3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} a^n & na^{n-1} & \frac{n(n-1)a^{n-2}}{2} \\ 0 & a^n & na^{n-1} \\ 0 & 0 & a^n \end{bmatrix}$$

Potęgowanie klatek Jordana

- Klatka stopnia k

$$\begin{bmatrix} a & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} a^n & (a^n)' & \frac{(a^n)''}{2!} & \dots & \frac{(a^n)^{(k)}}{k!} \\ 0 & a^n & (a^n)' & \dots & \frac{(a^n)^{(k-1)}}{(k-1)!} \\ 0 & 0 & a^n & \dots & \frac{(a^n)^{(k-2)}}{(k-2)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a^n \end{bmatrix}$$

- Mamy przepis na łatwe potęgowanie do dowolnej potęgi dowolnej macierzy, o ile dysponujemy rozkładem Jordana, tej macierzy

$$A^{n} = \mathbf{W}\begin{bmatrix} \mathbf{K}_1^{n} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_2^{n} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{K}_q^{n} \end{bmatrix}\mathbf{W}^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} a & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a \end{bmatrix}^{n} = \begin{bmatrix} a^n & (a^n)' & \frac{(a^n)''}{2!} & \dots & \frac{(a^n)^{(k)}}{k!} \\ 0 & a^n & (a^n)' & \dots & \frac{(a^n)^{(k-1)}}{(k-1)!} \\ 0 & 0 & a^n & \dots & \frac{(a^n)^{(k-2)}}{(k-2)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a^n \end{bmatrix}$$

Kolejne kroki dalej

- Skoro możemy łatwo potęgować, to w zasadzie możemy obliczyć dowolny wielomian od dowolnej macierzy
- W takim razie jesteśmy w stanie zdefiniować także dowolną funkcję od macierzy, o ile ta funkcja jest rozwijalna we szereg Taylora.
- W rozwinięciu Taylora jest tylko potęgowanie macierzy, ich skalowanie przez liczb i ich dodawanie.
- Co więcej okazuje się że dla dowolnej funkcji f rozwijalnej w szereg Taylora mamy:

$$f(\mathbf{A}) = \mathbf{W} f(\mathbf{J}) \mathbf{W}^{-}1$$

Źródła

- В. В. Колыбасова, Н. Ч. Крутицкая, А. В. Овчинников ЖОРДАНОВА ФОРМА МАТРИЦЫ ОПЕРАТОРА
- Michał Góra - Algebra liniowa - wykłady - Automatyka i robotyka
  `home.agh.edu.pl/~gora/algebra_ggios/Wyklad08.pdf`
  `home.agh.edu.pl/~gora/algebra/Wyklad09.pdf`
- Anna Zamojska-Dzienio - Algebra liniowa - konspekt wykładu
- Mariusz Przybycień - Matematyczne Metody Fizyki I - wykład 15
  `http://home.agh.edu.pl/~mariuszp/wfiis_mmf/index.html`
- Ireneusz Nabiałek - zadania z algebry liniowej
- Rakesh Jana - Jordan Canonical Form - Notes on Linear Algebra
- How to Find Bases for Jordan Canonical Forms
  `www.math.ucla.edu/~jlindquist/115B/JCFBases.pdf`
- K. R. MATTHEWS - LINEAR ALGEBRA NOTES - The Real Jordan Form
  `http://www.numbertheory.org/courses/MP274/`
- Xingzhi Zhan - Extremal sparsity property of the Jordan canonical form