TRANSFORMACJA LAPLACE'A

MATEUSZ KOWALSKI

Definicja: **Oryginału**

Funkcje zespoloną zmiennej rzeczywistej tj. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ nazywa się oryginałem gdy:

1. $f(t)$ jest przedziałami ciągła dla $t \geqslant 0$
2. $f(t) = 0$ dla $t < 0$
3. $\exists_{\lambda_0 \geqslant 0} \exists_{M>0} \forall_{t\in\mathbb{R}} \quad |f(t)| \leqslant M \cdot e^{\lambda_0 t}$

Definicja: **Transformaty Laplace'a**

Transformatą Laplace'a oryginału $f(t)$ nazywamy funkcję zespoloną zmiennej zespolonej tj. $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ określoną wzorem.

$$F(s) = \int\limits_0^\infty f(t)e^{-st}\mathrm{d}t, \quad s = \lambda + \mathbf{i}\omega$$

Piszemy $F(s) = \mathscr{L}\left\{f(t)\right\}$

Definicja: **Splotu funkcji**

Splotem 2 funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ i $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ nazywamy funkcję postaci:

$$f(t) * g(t) = \int\limits_0^t f(t-\tau)\cdot g(\tau)\mathrm{d}\tau =$$

$$= \int\limits_0^t f(\tau)\cdot g(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

Własności splotu: Splot jest operacją przemienną, łączną i rozdzielną względem dodawania. Splot dwóch oryginałów jest oryginałem.

Twierdzenie: **Borel'a o splocie**

$$\mathscr{L}\left\{f(t) * g(t)\right\} = F(s)\cdot G(s)$$

Twierdzenie: **o oryginale okresowym**

Transformacja oryginału okresowego $f(t)$ o okresie T:

$$\mathscr{L}\left\{f(t)\right\} = F(s) = \frac{1}{1-e^{-Ts}}\int\limits_0^T e^{-st}f(t)\mathrm{d}t$$

Definicja: **Transformatą odwrotną**

Transformatą odwrotną funkcji $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ nazywamy taką funkcję $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, której transformatą jest F, tzn.

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{F(s)\right\} = f(t) \ \text{ jeżeli } \ F(s) = \mathscr{L}\left\{f(t)\right\}$$

Twierdzenie: **Transformaty odwrotnej**

Odwrotna transformata Laplace'a jest dana wzorem:

$$f(t) = \mathscr{L}^{-1}\left\{F(s)\right\} =$$

$$= \frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\lim_{\omega\to\infty}\int\limits_{\lambda-\mathbf{i}\omega}^{\lambda-\mathbf{i}\omega}, F(s)e^{st}\mathrm{d}s \qquad t > 0,$$

gdzie liczba $\lambda \in \mathbb{R}$ jest tak dobrana aby wszystkie punkty osobliwe funkcji podcałkowej leżały po lewej stronie $\operatorname{Re} s = \lambda$.

Twierdzenie: **o Residudach**

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{F(s)\right\} = \sum_r \operatorname*{res}_{s=s_r} F(s)e^{st},$$

gdzie s_r to bieguny funkcji $F(s)$. Jeśli $F(s)$ jest funkcją wymianą oraz jeśli s_r jest jednokrotnym biegunem, to

$$\operatorname*{res}_{s=s_r} F(s)e^{st} = \lim_{s\to s_r} F(s)(s-s_r)e^{st},$$

jeśli s_r ma krotność k_r to $\operatorname*{res}_{s=s_r} F(s)e^{st} =$

$$= \frac{1}{(k_r-1)!}\lim_{s\to s_r}\frac{\mathrm{d}^{k_r-1}}{\mathrm{d}s^{k_r-1}}F(s)(s-s_k)^{k_r}e^{st}$$

Twierdzenia: **Graniczne transformaty**

$$\lim_{s\to\infty} sF(s) = \lim_{t\to 0^+} f(t) = f(0^+)$$

$$\lim_{s\to 0} sF(s) = \lim_{t\to\infty} f(t)$$

Twierdzenie: **Wzór Duhamela**

$$sF(s)G(s) = \mathscr{L}\left\{f(t)g(0) + \int\limits_0^T f(\tau)g'(t-\tau)\mathrm{d}\tau\right\}$$

Własności transformacji Laplace'a

MATEUSZ KOWALSKI

1. Przekształcenie $\mathscr{L}$ jest liniowe

$$\mathscr{L}\{cf(t)\} = c\mathscr{L}\{f(t)\}$$
$$\mathscr{L}\{f_1(t)+f_2(t)\} = \mathscr{L}\{f_1(t)\}+\mathscr{L}\{f_2(t)\}$$

2. Różniczkowanie oryginału

$$\mathscr{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0^+)$$
$$\mathscr{L}\{f''(t)\} = s^2F(s) - sf(0^+) - f'(0^+)$$
$$\mathscr{L}\left\{f^{(n)}(t)\right\} = s^nF(s) - \sum_{k=1}^{n} s^{n-k}f^{(k-1)}(0^+)$$

3. Całkowanie oryginału

$$\mathscr{L}\left\{\int_0^t f(x)\mathrm{d}x\right\} = \frac{1}{s}F(s)$$

4. Różniczkowanie obrazu

$$\mathscr{L}\{-tf(t)\} = F'(s)$$
$$\mathscr{L}\{(-1)^n t^n f(t)\} = F^{(n)}(s)$$

5. Całkowanie obrazu

$$\mathscr{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty F(s)\mathrm{d}s = \lim_{\mathrm{Re}\, p\to\infty}\int_s^p F(s)\mathrm{d}s$$

6. Twierdzenie o podobieństwie

$$\mathscr{L}\{f(at)\} = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right), \qquad \text{gdzie } a>0$$

7. Przesunięcie w dziedzinie oryginału

$$\mathscr{L}\{f(t-a)\eta(t-a)\} = e^{-as}F(s)$$

8. Przesunięcie w dziedzinie obrazu

$$\mathscr{L}\left\{e^{p_0 t}f(t)\right\} = F(s-p_0)$$

Tablica przekształceń Laplace'a

$\eta(t)$	$\frac{1}{s}$	$\sinh(at)$	$\frac{a}{s^2-a^2}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	$\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2-a^2}$
$\cos(at)$	$\frac{s}{s^2+a^2}$	$t\sin(at)$	$\frac{2as}{(s^2+a^2)^2}$
$\sin(at)$	$\frac{a}{s^2+a^2}$	$t\cos(at)$	$\frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$
$t^n,\ n\in\mathbb{N}$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$\frac{1}{2a}(\sin(at)+at\cos(at))$	$\frac{s^2}{(s^2+a^2)^2}$
$\frac{t^n}{n!},\ n\in\mathbb{N}$	$\frac{1}{s^{n+1}}$	$\frac{1}{2a^3}(\sin(at)-at\cos(at))$	$\frac{1}{(s^2+a^2)^2}$